Pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część II

specjalność teoretyczna

20 czerwca 2002

1. Znajdź równanie parametryczne krzywej różniczkowalnej na płaszczyźnie, która przecina wszystkie proste z pęku o wspólnym punkcie O pod ustalonym kątem α, gdzie $0<\alpha<\pi/2$.

Wskazówka: za parametr przyjmij kąt, jaki tworzy promień wodzący OX punktu X na krzywej z ustaloną półprostą OA; dobierz dogodny układ współrzędnych oraz ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie różniczkowe.

2. Skonstruuj (wraz z uzasadnieniem) przykład operatora liniowego T o normie 1 na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, mającego własność $|T(X)|<|X|$ dla dowolnego $X\in\mathcal{H}, X\neq 0$.

3. **(A)** Uzasadnij, że zbiór L wszystkich funkcji $f:R\to R$ postaci $f(x)=ax+b$, gdzie $a,b\in R, a\neq 0$, z działaniem składania, tworzy grupę.

(B) Rozważ na zbiorze L metrykę d określoną w następujący sposób: jeśli $f_1(x)=a_1x+b_1$ i $f_2(x)=a_2x+b_2$ to $d(f_1,f_2)=|a_1-a_2|+|b_1-b_2|$. Uzasadnij, że działanie mnożenia oraz branie elementu odwrotnego w grupie L są działaniami ciągłymi (względem powyższej metryki).

(C) Korzystając z tego, że jedynymi ciągłymi homomorfizmami $f:(R,+)\to(R-\{0\},\cdot)$ są funkcje wykładnicze $f(t)=e^{ct}$, znajdź wszystkie ciągłe homomorfizmy $h:(R,+)\to L$.

4. Uzasadnij, że jeśli obraz $f(U)$ pewnego otwartego zbioru $U\subset C$ przez funkcję analityczną f ma miarę zero, to funkcja f jest (lokalnie) stała na U.

Pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część II

specjalność zastosowania

20 czerwca 2002

1. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$. Udowodnić, że ciąg zmiennych losowych $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, którego wyrazy mają postać

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}$$

jest zbieżny prawie wszędzie oraz podać postać granicy.

2. Niech $\{N_1(t), t \geqslant 0\}$ i $\{N_2(t), t \geqslant 0\}$ będą niezależnymi procesami Poissona o intensywnościach odpowiednio λ_1 i λ_2.

(a) Uzasadnić, że proces $\{N(t), t \geqslant 0\} = \{N_1(t) + N_2(t), t \geqslant 0\}$ jest procesem Poissona o intensywności $\lambda_1 + \lambda_2$.

(b) Niech Z oznacza moment zajścia pierwszego zdarzenia w procesie $\{N(t), t \geqslant 0\}$. Podać postać rozkładu zmiennej losowej Z.

3. Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ dla $n \geqslant 2$ będzie próbą z rozkładu wykładniczego o dystrybuancie $F(x;\lambda) = [1 - \exp(-\lambda x)]\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, $\lambda > 0$. Wyznaczyć estymatory parametru λ:

(a) największej wiarogodności,

(b) nieobciążony z jednostajnie minimalną wariancją.

Który z tych estymatorów ma mniejsze ryzyko przy założeniu kwadratowej funkcji straty?

4. Rozwiązać równanie

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

przy warunku początkowym $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część II

specjalność matematyka z informatyką

20 czerwca 2002r.

1. Rozwiązać równanie

$$y'' - 2y' + y = 0$$

przy warunku początkowym

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

2. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}.$$

Udowodnić, że ciąg (z metody *Newton'a*)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ (punktu startowego) jest **rozbieżny** !

3. Wyznaczyć wielomian interpolacyjny *Lagrange'a*

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \cdots + y_n \ell_n(x)$$

dla następujących danych:

x	-1	1	3	4
y	0	-1	1	2

4. W programie jest następująca deklaracja *tablicy* liczb całkowitych

```
int A[7]={2,1,3,4,6,7,8};
```

Co pojawi się na ekranie po wykonaniu nstępującego fragmentu kodu

```
int i,j,n,r;

n = 7;
for(i=1;i<n;++i)
  for(j=0;j<n-i;++j)
    if(A[j]<A[j+1])
    {
       r      = A[j+1];
       A[j+1] = A[j];
       A[j]   = r;
    }
for(i=0;i<n;++i)
  printf("%i\n",A[i]);
```

Ile jest wykonywanych porównań i podstawień?

5. W partii towaru, która przypuszczalnie zawiera 10% braków, znaleziono 71 braków w próbce złożonej z 500 elementów. Sprawdzić na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezę orzekającą, że w partii tej jest istotnie 10% braków.
Skorzystać z odpowiedniego przybliżenia rozkładem normalnym oraz z podanej tablicy dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Rozkład normalny; $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0	0,5000	0,4	0,6554	0,8	0,7881	1,2	0,8849	1,6	0,9452
0,01	0,5040	0,41	0,6591	0,81	0,7910	1,21	0,8869	1,61	0,9463
0,02	0,5080	0,42	0,6628	0,82	0,7939	1,22	0,8888	1,62	0,9474
0,03	0,5120	0,43	0,6664	0,83	0,7967	1,23	0,8907	1,63	0,9484
0,04	0,5160	0,44	0,6700	0,84	0,7995	1,24	0,8925	1,64	0,9495
0,05	0,5199	0,45	0,6736	0,85	0,8023	1,25	0,8944	1,65	0,9505
0,06	0,5239	0,46	0,6772	0,86	0,8051	1,26	0,8962	1,66	0,9515
0,07	0,5279	0,47	0,6808	0,87	0,8078	1,27	0,8980	1,67	0,9525
0,08	0,5319	0,48	0,6844	0,88	0,8106	1,28	0,8997	1,68	0,9535
0,09	0,5359	0,49	0,6879	0,89	0,8133	1,29	0,9015	1,69	0,9545
0,1	0,5398	0,5	0,6915	0,9	0,8159	1,3	0,9032	1,7	0,9554
0,11	0,5438	0,51	0,6950	0,91	0,8186	1,31	0,9049	1,71	0,9564
0,12	0,5478	0,52	0,6985	0,92	0,8212	1,32	0,9066	1,72	0,9573
0,13	0,5517	0,53	0,7019	0,93	0,8238	1,33	0,9082	1,73	0,9582
0,14	0,5557	0,54	0,7054	0,94	0,8264	1,34	0,9099	1,74	0,9591
0,15	0,5596	0,55	0,7088	0,95	0,8289	1,35	0,9115	1,75	0,9599
0,16	0,5636	0,56	0,7123	0,96	0,8315	1,36	0,9131	1,76	0,9608
0,17	0,5675	0,57	0,7157	0,97	0,8340	1,37	0,9147	1,77	0,9616
0,18	0,5714	0,58	0,7190	0,98	0,8365	1,38	0,9162	1,78	0,9625
0,19	0,5753	0,59	0,7224	0,99	0,8389	1,39	0,9177	1,79	0,9633
0,2	0,5793	0,6	0,7257	1	0,8413	1,4	0,9192	1,8	0,9641
0,21	0,5832	0,61	0,7291	1,01	0,8438	1,41	0,9207	1,81	0,9649
0,22	0,5871	0,62	0,7324	1,02	0,8461	1,42	0,9222	1,82	0,9656
0,23	0,5910	0,63	0,7357	1,03	0,8485	1,43	0,9236	1,83	0,9664
0,24	0,5948	0,64	0,7389	1,04	0,8508	1,44	0,9251	1,84	0,9671
0,25	0,5987	0,65	0,7422	1,05	0,8531	1,45	0,9265	1,85	0,9678
0,26	0,6026	0,66	0,7454	1,06	0,8554	1,46	0,9279	1,86	0,9686
0,27	0,6064	0,67	0,7486	1,07	0,8577	1,47	0,9292	1,87	0,9693
0,28	0,6103	0,68	0,7517	1,08	0,8599	1,48	0,9306	1,88	0,9699
0,29	0,6141	0,69	0,7549	1,09	0,8621	1,49	0,9319	1,89	0,9706
0,3	0,6179	0,7	0,7580	1,1	0,8643	1,5	0,9332	1,9	0,9713
0,31	0,6217	0,71	0,7611	1,11	0,8665	1,51	0,9345	1,91	0,9719
0,32	0,6255	0,72	0,7642	1,12	0,8686	1,52	0,9357	1,92	0,9726
0,33	0,6293	0,73	0,7673	1,13	0,8708	1,53	0,9370	1,93	0,9732
0,34	0,6331	0,74	0,7704	1,14	0,8729	1,54	0,9382	1,94	0,9738
0,35	0,6368	0,75	0,7734	1,15	0,8749	1,55	0,9394	1,95	0,9744
0,36	0,6406	0,76	0,7764	1,16	0,8770	1,56	0,9406	1,96	0,9750
0,37	0,6443	0,77	0,7794	1,17	0,8790	1,57	0,9418	1,97	0,9756
0,38	0,6480	0,78	0,7823	1,18	0,8810	1,58	0,9429	1,98	0,9761
0,39	0,6517	0,79	0,7852	1,19	0,8830	1,59	0,9441	1,99	0,9767

Pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część II

specjalność ekonomiczna

20 czerwca 2002

1. Fabryka produkuje dwa wyroby A i B, zużywając do tego celu trzy rodzaje surowców S_1, S_2 i S_3, których dobowe zasoby wynoszą odpowiednio 32 jednostki surowca S_1, 60 jednostek surowca S_2 oraz 53 jednostki surowca S_3.

(a) Ułożyć plan produkcji gwarantujący fabryce maksymalny zysk, wiedząc, że zysk jednostkowy z tytułu produkcji wyrobu A wynosi 40 zł, a wyrobu B wynośi 100 zł. Jednostkowe zużycie surowców przy produkcji wyrobów A i B podane jest w nastepującej tabelce.

	S_1	S_2	S_3
A	4	3	8
B	4	15	4

(b) Co można powiedzieć o zużyciu surowców w produkcji optymalizującej zysk?

2. Liczba szkód generowanych przez pewną grupę ryzyk w ciągu miesiąca ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 33,33. Wysokość pojedynczej szkody ma rozkład prawdopodobieństwa o wartości oczekiwanej 8 i odchyleniu standardowym 6. Wysokość szkód i liczby szkód w kolejnych miesiącach są niezależne. Niech S_{12} oznacza łączną wartość szkód w ciągu roku.
Niech q będzie liczbą taką, że $P(S_{12} > q) = 0{,}95$. Stosując aproksymację normalną, wylicz q. Wsk. Dla rozkładu normalnego

$$\Phi(z) = 0{,}95,$$

dla $z = 1{,}645$.

3. Zakładamy następujący model: natężenie zgonów jest stałe i wynosi $\mu > 0$ oraz siła stopy procentowej jest stała i wynosi $\delta > 0$.

(a) Napisz prawdopodobieństwo ${}_tp_x$, że x-latek przeżyje czas t.

(b) Oblicz terminową rentę życiową płatną ciągle $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$.

(c) Pokaż, że ta renta $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ jest równa rencie pewnej $\bar{a}_{\overline{n}|}$ obliczonej przy innej sile procentowej δ' oraz podaj δ'.

4. Rozwiąż równanie

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

przy warunku początkowym $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5. W partii towaru, który przypuszczalnie zawiera 10% braków, znaleziono 71 braków w próbce złożonej z 500 elementów. Sprawdzić, na poziomie istotności $\alpha = 0,05$, prawdziwość hipotezy orzekającej, że w partii tej jest istotnie 10% braków.
Skorzystać z odpowiedniego przybliżenia rozkładem normalnym oraz z podanej tablicy dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Rozkład normalny; $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0	0,5000	0,4	0,6554	0,8	0,7881	1,2	0,8849	1,6	0,9452
0,01	0,5040	0,41	0,6591	0,81	0,7910	1,21	0,8869	1,61	0,9463
0,02	0,5080	0,42	0,6628	0,82	0,7939	1,22	0,8888	1,62	0,9474
0,03	0,5120	0,43	0,6664	0,83	0,7967	1,23	0,8907	1,63	0,9484
0,04	0,5160	0,44	0,6700	0,84	0,7995	1,24	0,8925	1,64	0,9495
0,05	0,5199	0,45	0,6736	0,85	0,8023	1,25	0,8944	1,65	0,9505
0,06	0,5239	0,46	0,6772	0,86	0,8051	1,26	0,8962	1,66	0,9515
0,07	0,5279	0,47	0,6808	0,87	0,8078	1,27	0,8980	1,67	0,9525
0,08	0,5319	0,48	0,6844	0,88	0,8106	1,28	0,8997	1,68	0,9535
0,09	0,5359	0,49	0,6879	0,89	0,8133	1,29	0,9015	1,69	0,9545
0,1	0,5398	0,5	0,6915	0,9	0,8159	1,3	0,9032	1,7	0,9554
0,11	0,5438	0,51	0,6950	0,91	0,8186	1,31	0,9049	1,71	0,9564
0,12	0,5478	0,52	0,6985	0,92	0,8212	1,32	0,9066	1,72	0,9573
0,13	0,5517	0,53	0,7019	0,93	0,8238	1,33	0,9082	1,73	0,9582
0,14	0,5557	0,54	0,7054	0,94	0,8264	1,34	0,9099	1,74	0,9591
0,15	0,5596	0,55	0,7088	0,95	0,8289	1,35	0,9115	1,75	0,9599
0,16	0,5636	0,56	0,7123	0,96	0,8315	1,36	0,9131	1,76	0,9608
0,17	0,5675	0,57	0,7157	0,97	0,8340	1,37	0,9147	1,77	0,9616
0,18	0,5714	0,58	0,7190	0,98	0,8365	1,38	0,9162	1,78	0,9625
0,19	0,5753	0,59	0,7224	0,99	0,8389	1,39	0,9177	1,79	0,9633
0,2	0,5793	0,6	0,7257	1	0,8413	1,4	0,9192	1,8	0,9641
0,21	0,5832	0,61	0,7291	1,01	0,8438	1,41	0,9207	1,81	0,9649
0,22	0,5871	0,62	0,7324	1,02	0,8461	1,42	0,9222	1,82	0,9656
0,23	0,5910	0,63	0,7357	1,03	0,8485	1,43	0,9236	1,83	0,9664
0,24	0,5948	0,64	0,7389	1,04	0,8508	1,44	0,9251	1,84	0,9671
0,25	0,5987	0,65	0,7422	1,05	0,8531	1,45	0,9265	1,85	0,9678
0,26	0,6026	0,66	0,7454	1,06	0,8554	1,46	0,9279	1,86	0,9686
0,27	0,6064	0,67	0,7486	1,07	0,8577	1,47	0,9292	1,87	0,9693
0,28	0,6103	0,68	0,7517	1,08	0,8599	1,48	0,9306	1,88	0,9699
0,29	0,6141	0,69	0,7549	1,09	0,8621	1,49	0,9319	1,89	0,9706
0,3	0,6179	0,7	0,7580	1,1	0,8643	1,5	0,9332	1,9	0,9713
0,31	0,6217	0,71	0,7611	1,11	0,8665	1,51	0,9345	1,91	0,9719
0,32	0,6255	0,72	0,7642	1,12	0,8686	1,52	0,9357	1,92	0,9726
0,33	0,6293	0,73	0,7673	1,13	0,8708	1,53	0,9370	1,93	0,9732
0,34	0,6331	0,74	0,7704	1,14	0,8729	1,54	0,9382	1,94	0,9738
0,35	0,6368	0,75	0,7734	1,15	0,8749	1,55	0,9394	1,95	0,9744
0,36	0,6406	0,76	0,7764	1,16	0,8770	1,56	0,9406	1,96	0,9750
0,37	0,6443	0,77	0,7794	1,17	0,8790	1,57	0,9418	1,97	0,9756
0,38	0,6480	0,78	0,7823	1,18	0,8810	1,58	0,9429	1,98	0,9761
0,39	0,6517	0,79	0,7852	1,19	0,8830	1,59	0,9441	1,99	0,9767

Pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część II

specjalność nauczycielska

20 czerwca 2002

1. Rozwiązać równanie $y''-2y'+y=0$ przy warunku początkowym $y(0)=1, y'(0)=0$.

2. Uzasadnić, wprost z definicji, że $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ jest liczbą algebraiczną.

3. Niech J oznacza jednokładność o skali 3 i środku w punkcie $P=(0,0)$ oraz niech T oznacza przesunięcie o wektor $[4,3]$. Uzasadnić, że złożenie $J\circ T$ jest jednokładnością. Wyznaczyć jej środek i skalę.

4. (Przyjmujemy, że Ziemia jest kulą.) Niech współrzędne geograficzne punktów A,B wynoszą: $A=(10^oE,45^oN), B=(100^oE,45^oN)$. Znaleźć stosunek długości najkrótszej drogi (na sferze) od A do B, do długości łuku AB równoleżnika, na którym leżą.

5. W partii towaru, która przypuszczalnie zawiera 10% braków, znaleziono 71 braków w próbce złożonej z 500 elementów. Sprawdzić na poziomie istotności $\alpha=0,05$ hipotezę orzekającą, że w partii tej jest istotnie 10% braków.
Skorzystać z odpowiedniego przybliżenia rozkładem normalnym oraz z podanej tablicy dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Rozkład normalny; $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0	0,5000	0,4	0,6554	0,8	0,7881	1,2	0,8849	1,6	0,9452
0,01	0,5040	0,41	0,6591	0,81	0,7910	1,21	0,8869	1,61	0,9463
0,02	0,5080	0,42	0,6628	0,82	0,7939	1,22	0,8888	1,62	0,9474
0,03	0,5120	0,43	0,6664	0,83	0,7967	1,23	0,8907	1,63	0,9484
0,04	0,5160	0,44	0,6700	0,84	0,7995	1,24	0,8925	1,64	0,9495
0,05	0,5199	0,45	0,6736	0,85	0,8023	1,25	0,8944	1,65	0,9505
0,06	0,5239	0,46	0,6772	0,86	0,8051	1,26	0,8962	1,66	0,9515
0,07	0,5279	0,47	0,6808	0,87	0,8078	1,27	0,8980	1,67	0,9525
0,08	0,5319	0,48	0,6844	0,88	0,8106	1,28	0,8997	1,68	0,9535
0,09	0,5359	0,49	0,6879	0,89	0,8133	1,29	0,9015	1,69	0,9545
0,1	0,5398	0,5	0,6915	0,9	0,8159	1,3	0,9032	1,7	0,9554
0,11	0,5438	0,51	0,6950	0,91	0,8186	1,31	0,9049	1,71	0,9564
0,12	0,5478	0,52	0,6985	0,92	0,8212	1,32	0,9066	1,72	0,9573
0,13	0,5517	0,53	0,7019	0,93	0,8238	1,33	0,9082	1,73	0,9582
0,14	0,5557	0,54	0,7054	0,94	0,8264	1,34	0,9099	1,74	0,9591
0,15	0,5596	0,55	0,7088	0,95	0,8289	1,35	0,9115	1,75	0,9599
0,16	0,5636	0,56	0,7123	0,96	0,8315	1,36	0,9131	1,76	0,9608
0,17	0,5675	0,57	0,7157	0,97	0,8340	1,37	0,9147	1,77	0,9616
0,18	0,5714	0,58	0,7190	0,98	0,8365	1,38	0,9162	1,78	0,9625
0,19	0,5753	0,59	0,7224	0,99	0,8389	1,39	0,9177	1,79	0,9633
0,2	0,5793	0,6	0,7257	1	0,8413	1,4	0,9192	1,8	0,9641
0,21	0,5832	0,61	0,7291	1,01	0,8438	1,41	0,9207	1,81	0,9649
0,22	0,5871	0,62	0,7324	1,02	0,8461	1,42	0,9222	1,82	0,9656
0,23	0,5910	0,63	0,7357	1,03	0,8485	1,43	0,9236	1,83	0,9664
0,24	0,5948	0,64	0,7389	1,04	0,8508	1,44	0,9251	1,84	0,9671
0,25	0,5987	0,65	0,7422	1,05	0,8531	1,45	0,9265	1,85	0,9678
0,26	0,6026	0,66	0,7454	1,06	0,8554	1,46	0,9279	1,86	0,9686
0,27	0,6064	0,67	0,7486	1,07	0,8577	1,47	0,9292	1,87	0,9693
0,28	0,6103	0,68	0,7517	1,08	0,8599	1,48	0,9306	1,88	0,9699
0,29	0,6141	0,69	0,7549	1,09	0,8621	1,49	0,9319	1,89	0,9706
0,3	0,6179	0,7	0,7580	1,1	0,8643	1,5	0,9332	1,9	0,9713
0,31	0,6217	0,71	0,7611	1,11	0,8665	1,51	0,9345	1,91	0,9719
0,32	0,6255	0,72	0,7642	1,12	0,8686	1,52	0,9357	1,92	0,9726
0,33	0,6293	0,73	0,7673	1,13	0,8708	1,53	0,9370	1,93	0,9732
0,34	0,6331	0,74	0,7704	1,14	0,8729	1,54	0,9382	1,94	0,9738
0,35	0,6368	0,75	0,7734	1,15	0,8749	1,55	0,9394	1,95	0,9744
0,36	0,6406	0,76	0,7764	1,16	0,8770	1,56	0,9406	1,96	0,9750
0,37	0,6443	0,77	0,7794	1,17	0,8790	1,57	0,9418	1,97	0,9756
0,38	0,6480	0,78	0,7823	1,18	0,8810	1,58	0,9429	1,98	0,9761
0,39	0,6517	0,79	0,7852	1,19	0,8830	1,59	0,9441	1,99	0,9767