1. Niech $f:[0,\infty)\to R$ będzie funkcją ciągłą taką, że $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$. Udowodnij, że

$$\lim_{t\to 0} t\cdot\int_0^\infty e^{-tx}f(x)dx=1.$$

2. Uzasadnij, że w każdej domkniętej podgrupie $H\neq R$ w grupie $(R,+)$ element 0 jest punktem izolowanym. Uzasadnij też, że każda taka nietrywialna podgrupa H ma postać $H=\{ka:k\in Z\}$ dla pewnej liczby $a\neq 0$.

3. Dana jest funkcja $f(x)=2x$ oraz dwie niezależne zmienne losowe X i Y o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jednocześnie spełnione są warunki $X\leqslant Y$ oraz $\int_X^Y f(x)dx\geqslant 1/2$.

4. $SL(2,Z)$ to zbiór macierzy rozmiaru 2×2 o wyrazach całkowitych i o wyznaczniku 1.

(A) Uzasadnij, że $SL(2,Z)$ jest podgrupą w grupie wszystkich macierzy odwracalnych rozmiaru 2×2.

(B) Udowodnij, że dla dowolnych względnie pierwszych liczb p,q istnieje macierz $A\in SL(2,Z)$ postaci $A=\begin{pmatrix}p & x\\ q & y\end{pmatrix}$.

(C) Udowodnij, że dla dowolnych dwóch par p_1,q_1 oraz p_2,q_2 liczb całkowitych względnie pierwszych (tzn. takich, że $(p_1,q_1)=1$ oraz $(p_2,q_2)=1$) istnieje macierz $A\in SL(2,Z)$ taka, że $A\begin{pmatrix}p_1\\ q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_2\\ q_2\end{pmatrix}$.

1. Rozwiązać równanie $y''-y'+y=0$ przy warunku początkowym $y(0)=1, y'(0)=0$.

2. Niech $[a_n,b_n]$, gdzie $a_n,b_n\in\mathbb{R}$ będą przedziałami z metody znajdywania rozwiązania równania

$$f(x)=0$$

przez *„połowienie przedziału"*. Udowodnić, że dla $r\in\mathbb{R}$ spełniającego $f(r)=0$ zachodzi:

$$\{r\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n].$$

3. Niech

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przedstawić macierz A w postaci iloczynu

$$A=LU\,,$$

gdzie L jest macierzą trójkątną dolnie, a U – trójkątną górnie. Czy dla macierzy A istnieje rozkład *Choleskiego* ?

4. Niech będzie dana następująca deklaracja funkcji *rekurencyjnej*

```
int F(int n)
{
   if(2<n)
     return 2.0*F(n-1)+F(n-2);
   return 1;
}
```

Wypisać, co pojawi się na ekranie po wykonaniu następującego fragmentu kodu

```
int n;

for(n=1;n<20;++n)
  printf("%i\n",F(n));
```

Podać *„matematyczną”* definicję ciągu określonego przez tę funkcję.

5. Dla punktów o współrzędnych

$$(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(4,3),(4,4)$$

wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów równanie prostej regresji.

1. Wyznaczyć optymalną wartość funkcji celu f, w następującym zagadnieniu programowania liniowego

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min,$$

przy warunkach:

$$x_i \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad i = 1,...,5$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geqslant 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &\geqslant 1 \end{aligned}$$

2. Klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela charakteryzują parametry:

λ - roczna częstotliwość (poissonowskiego procesu pojawiania się szkód,
u - nadwyżka początkowa,
Y - zmienna losowa opisująca wartość pojedyńczej szkody,
θ - stosunkowy narzut na składkę netto.

Załóżmy, że $P(Y = M) = 1$, gdzie M jest dodatnie. Załóżmy także, że $u = 10 \cdot M$. Przyjmijmy wreszcie, iż nasz cel to skalkulowanie składki tak, aby zachodził warunek bezpieczeństwa: $e^{-Ru} = 0{,}1$, gdzie R to tzw. *adjustment coefficient*. Wyliczyć wartość θ.

3. Rozwiązać równanie $y'' - y' + y = 0$ przy warunku początkowym $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

4. Dla punktów o współrzędnych

$$(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(4,3),(4,4)$$

wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów równanie prostej regresji.

1. Rozwiązać równanie $y''-y'+y=0$ przy warunku początkowym $y(0)=1, y'(0)=0$.

2. Podać rozwinięcie w ułamek łańcuchowy liczby $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

3. Niech J oznacza jednokładność o skali 2 i środku w punkcie $P=(2,3)$ oraz niech S oznacza symetrię środkową względem punktu $Q=(5,6)$. Podać wzór (we współrzędnych kartezjańskich, lub w liczbach zespolonych) złożenia $S\circ J$.

4. Przyjmujemy, że Ziemia jest kulą. Współrzędne geograficzne punktów A_0, A_1, A_2, A_3 wynoszą:

$$A_0=(0^oE,45^oN), A_1=(90^oE,45^oN),$$

$$A_2=(180^oE,45^oN), A_3=(90^oW,45^oN).$$

Czy równoleżnik szerokości geogr. 60^oN jest okręgiem wpisanym w czworokąt **sferyczny** $A_0A_1A_2A_3$? Uzasadnić odpowiedź.

5. Dla punktów o współrzędnych

$$(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(4,3),(4,4)$$

wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów równanie prostej regresji.