1. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+x$. Podać w postaci uproszczonej wartości pochodnej funkcji f w podanych punktach.

a) $f'(0)=\mathbf{1}$ **b)** $f'(2)=\mathbf{1/4}$

c) $f'(10)=\mathbf{1/13}$ **d)** $f'(30)=\mathbf{1/28}$

2. Podać sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{7}-\sqrt[n+1]{7}\right)=\mathbf{6}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{5}-\sqrt[n+1]{5}\right)=\mathbf{4}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n+1]{3}\right)=\mathbf{2}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2}\right)=\mathbf{1}$

3. Podać najmniejszą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=x^4-4x^2+9$ **5**

b) $f(x)=x^2+2x+4$ **3**

c) $f(x)=x^8+8x^4+25$ **25**

d) $f(x)=x^6-6x^3+16$ **7**

4. Podać wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^1 \frac{x^{24}\,dx}{x^{50}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{100}}$

b) $\int_0^1 \frac{x^{9}\,dx}{x^{20}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{40}}$

c) $\int_0^1 \frac{x^{10}\,dx}{x^{22}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{44}}$

d) $\int_0^1 \frac{x^{19}\,dx}{x^{40}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{80}}$

5. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = x^{100} \cdot e^{x^5}$. Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(200)}(0) = \mathbf{200!/20!}$

b) $f^{(400)}(0) = \mathbf{400!/60!}$

c) $f^{(300)}(0) = \mathbf{300!/40!}$

d) $f^{(500)}(0) = \mathbf{500!/80!}$

6. Podać liczbę liczb zespolonych z spełniających podane równanie.

a) $z^{40} + z^{10} = z^{20} + z^{30}$, **21**

b) $z^{40} + z^{10} = z^{15} + z^{35}$, **26**

c) $z^{40} + z^{10} = z^{13} + z^{37}$, **28**

d) $z^{40} + z^{10} = z^{14} + z^{36}$, **29**

7. Podać pole równoległoboku, którego trzema kolejnymi wierzchołkami są punkty A, $B=(0,0)$ i C.

a) $A=(3,4)$, $C=(4,3)$, **7**

b) $A=(2,3)$, $C=(5,7)$, **1**

c) $A=(1,2)$, $C=(3,4)$, **2**

d) $A=(3,2)$, $C=(5,7)$, **11**

8. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby macierz A spełniała równanie

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $A=\begin{pmatrix} 7 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$, $a=-\mathbf{16}$, $b=-\mathbf{7}$

b) $A=\begin{pmatrix} 7 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$, $a=-\mathbf{12}$, $b=-\mathbf{7}$

c) $A=\begin{pmatrix} 5 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$, $a=-\mathbf{8}$, $b=-\mathbf{5}$

d) $A=\begin{pmatrix} 5 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$, $a=-\mathbf{12}$, $b=-\mathbf{5}$

9. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie cyklicznej rzędu 10! (dziesięć silnia). Wówczas:

a) $E(25)=\mathbf{20}$

b) $E(18)=\mathbf{6}$

c) $E(16)=\mathbf{8}$

d) $E(22)=\mathbf{0}$

10. Dla podanych rzędów elementów a i b grupy abelowej podać najmniejszy możliwy rząd elementu ab.

a) $r(a)=14,\ \ r(b)=21,\quad r(ab)=\mathbf{6}$

b) $r(a)=10,\ \ r(b)=14,\quad r(ab)=\mathbf{35}$

c) $r(a)=6,\ \ r(b)=10,\quad r(ab)=\mathbf{15}$

d) $r(a)=6,\ \ r(b)=15,\quad r(ab)=\mathbf{10}$

11. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$ i $P(A\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego najmniejszą możliwą wartość, jaką może przyjmować $P(B\cap C)$.

a) $P(A\cap B)=1/4,\ \ P(A\cap C)=1/8,\ \ P(B\cap C)=\mathbf{1/32}$

b) $P(A\cap B)=1/2,\ \ P(A\cap C)=1/3,\ \ P(B\cap C)=\mathbf{1/6}$

c) $P(A\cap B)=1/2,\ \ P(A\cap C)=1/4,\ \ P(B\cap C)=\mathbf{1/8}$

d) $P(A\cap B)=1/3,\ \ P(A\cap C)=1/5,\ \ P(B\cap C)=\mathbf{1/15}$

12. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Powiemy, że zawartość urny jest cudowna, jeżeli przy losowaniu z urny dwóch kul (losowanie bez zwracania) prawdopodobieństwo, że wylosowano dwie kule różnego koloru, jest równe $1/2$. Dla podanej liczby b podać taką liczbę $c>b$, że opisana wyżej urna jest cudowna.

a) $b=3,\quad c=\mathbf{6}$

b) $b=10,\quad c=\mathbf{15}$

c) $b=15,\quad c=\mathbf{21}$

d) $b=1,\quad c=\mathbf{3}$