

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots + bn}$.

Wtedy

a) $G(3, 3) = 4/9$

b) $G(5, 2) = 3$

c) $G(5, 4) = 3/4$

d) $G(7, 4) = 3/2$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(75)}(0) = \frac{75!}{25!} + \frac{75!}{15!}$

b) $f^{(70)}(0) = \frac{70!}{35!} + \frac{70!}{14!}$

c) $f^{(66)}(0) = \frac{66!}{33!} + \frac{66!}{22!}$

d) $f^{(60)}(0) = \frac{60!}{30!} + \frac{60!}{20!} + \frac{60!}{12!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^\infty \frac{x^5 + x^3}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (6, 8)$

b) $\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (5, 6)$

c) $\int_0^\infty \frac{x^7 + x^5}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (8, 12)$

d) $\int_0^\infty \frac{x^6 + x^4}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (7, 10)$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^2}{k^5}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1\frac{1}{8}}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^2}{k^7}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1\frac{7}{8}}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^4}{k^7}} = \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{64}}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^4}{k^9}} = \frac{\mathbf{75}}{\mathbf{64}} = \mathbf{1\frac{11}{64}}$$

5. Podaj kres dolny zbioru.

$$\text{a) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 32x + 32y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-96}$$

$$\text{b) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 4x + 32y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-51}$$

$$\text{c) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 32x : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-48}$$

$$\text{d) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 4x + 4y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-6}$$

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^3 \cdot \bar{z}^3 = 5^9$.

$$\text{a) } z = 5 + ai, \quad a = \mathbf{10}$$

$$\text{b) } z = 2 + ai, \quad a = \mathbf{11}$$

$$\text{c) } z = 11 + ai, \quad a = \mathbf{2}$$

$$\text{d) } z = 10 + ai, \quad a = \mathbf{5}$$

7. Niech $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Dla danego k podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy A^k .

a) $k = 2$, **104**

b) $k = 3$, **1008**

c) $k = 4$, **10 016**

d) $k = 5$, **100 032**

8. Dla podanej jednej z liczb a , b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(3, 2, 1)$ i $(9, 4, 1)$.

a) $a = 4$, $b = -12$, $c = 12$

b) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

c) $a = -2/3$, $b = 2$, $c = -2$

d) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 24^k . Wówczas

a) $C(2) = 21$

b) $C(1) = 8$

c) $C(4) = 65$

d) $C(3) = 40$

10. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(-3, \infty)$, a działanie grupowe "o" jest określone wzorem $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 3$, $g^{-1} = -17/6$

b) $g = 0$, $g^{-1} = -8/3$

c) $g = 1$, $g^{-1} = -11/4$

d) $g = 2$, $g^{-1} = -14/5$

11. Rzucamy n -ścienną kostką do gry (mającą na ścianach kolejne liczby oczek od 1 do n , przy czym każdy wynik wypada z prawdopodobieństwem $1/n$). Jeżeli wypadło $n/2$ oczek lub mniej, unieważniamy pierwszy rzut i rzucaamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(12) = 8$

b) $E(14) = 37/4 = 9\frac{1}{4}$

c) $E(16) = 21/2 = 10\frac{1}{2}$

d) $E(20) = 13$

12. Zdarzenia losowe A , B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ i $P(B \cap C)$ podaj $P(A \cap B \cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B i C spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/7$, $P(A \cap C) = 4/7$, $P(B \cap C) = 1/12$,
 $P(A \cap B \cap C) = 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21$

b) $P(A \cap B) = 2/7$, $P(A \cap C) = 2/7$, $P(B \cap C) = 1/12$,
 $P(A \cap B \cap C) = 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21$

c) $P(A \cap B) = 4/7$, $P(A \cap C) = 4/7$, $P(B \cap C) = 1/4$,
 $P(A \cap B \cap C) = \mathbf{NIE}$

d) $P(A \cap B) = 3/7$, $P(A \cap C) = 3/7$, $P(B \cap C) = 1/4$,
 $P(A \cap B \cap C) = 3/14$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots + bn}$.

Wtedy

a) $G(5, 4) = \mathbf{3/4}$

b) $G(5, 2) = \mathbf{3}$

c) $G(3, 3) = \mathbf{4/9}$

d) $G(7, 4) = \mathbf{3/2}$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(60)}(0) = \frac{60!}{30!} + \frac{60!}{20!} + \frac{60!}{12!}$

b) $f^{(66)}(0) = \frac{66!}{33!} + \frac{66!}{22!}$

c) $f^{(75)}(0) = \frac{75!}{25!} + \frac{75!}{15!}$

d) $f^{(70)}(0) = \frac{70!}{35!} + \frac{70!}{14!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^\infty \frac{x^7 + x^5}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{8, 12})$

b) $\int_0^\infty \frac{x^5 + x^3}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{6, 8})$

c) $\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{5, 6})$

d) $\int_0^\infty \frac{x^6 + x^4}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{7, 10})$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^4}{k^7}} = \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{64}}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^2}{k^7}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1\frac{7}{8}}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^2}{k^5}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1\frac{1}{8}}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^4}{k^9}} = \frac{\mathbf{75}}{\mathbf{64}} = \mathbf{1\frac{11}{64}}$$

5. Podaj kres dolny zbioru.

$$\text{a) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 4x + 4y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-6}$$

$$\text{b) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 32x : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-48}$$

$$\text{c) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 32x + 32y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-96}$$

$$\text{d) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 4x + 32y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-51}$$

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^3 \cdot \bar{z}^3 = 5^9$.

$$\text{a) } z = 11 + ai, \quad a = \mathbf{2}$$

$$\text{b) } z = 5 + ai, \quad a = \mathbf{10}$$

$$\text{c) } z = 2 + ai, \quad a = \mathbf{11}$$

$$\text{d) } z = 10 + ai, \quad a = \mathbf{5}$$

7. Niech $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Dla danego k podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy A^k .

a) $k = 4$, **10 016**

b) $k = 3$, **1008**

c) $k = 2$, **104**

d) $k = 5$, **100 032**

8. Dla podanej jednej z liczb a , b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(3, 2, 1)$ i $(9, 4, 1)$.

a) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

b) $a = -2/3$, $b = 2$, $c = -2$

c) $a = 4$, $b = -12$, $c = 12$

d) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 24^k . Wówczas

a) $C(4) = 65$

b) $C(2) = 21$

c) $C(1) = 8$

d) $C(3) = 40$

10. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(-3, \infty)$, a działanie grupowe "o" jest określone wzorem $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 3$, $g^{-1} = -17/6$

b) $g = 2$, $g^{-1} = -14/5$

c) $g = 1$, $g^{-1} = -11/4$

d) $g = 0$, $g^{-1} = -8/3$

11. Rzucamy n -ścienną kostką do gry (mającą na ścianach kolejne liczby oczek od 1 do n , przy czym każdy wynik wypada z prawdopodobieństwem $1/n$). Jeżeli wypadło $n/2$ oczek lub mniej, unieważniamy pierwszy rzut i rzucaamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(16) = 21/2 = 10\frac{1}{2}$

b) $E(14) = 37/4 = 9\frac{1}{4}$

c) $E(12) = 8$

d) $E(20) = 13$

12. Zdarzenia losowe A , B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ i $P(B \cap C)$ podaj $P(A \cap B \cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B i C spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 3/7$, $P(A \cap C) = 3/7$, $P(B \cap C) = 1/4$,
 $P(A \cap B \cap C) = 3/14$

b) $P(A \cap B) = 4/7$, $P(A \cap C) = 4/7$, $P(B \cap C) = 1/4$,
 $P(A \cap B \cap C) = \mathbf{NIE}$

c) $P(A \cap B) = 1/7$, $P(A \cap C) = 4/7$, $P(B \cap C) = 1/12$,
 $P(A \cap B \cap C) = 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21$

d) $P(A \cap B) = 2/7$, $P(A \cap C) = 2/7$, $P(B \cap C) = 1/12$,
 $P(A \cap B \cap C) = 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots + bn}$.

Wtedy

a) $G(5, 4) = \mathbf{3/4}$

b) $G(3, 3) = \mathbf{4/9}$

c) $G(7, 4) = \mathbf{3/2}$

d) $G(5, 2) = \mathbf{3}$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(75)}(0) = \frac{75!}{25!} + \frac{75!}{15!}$

b) $f^{(66)}(0) = \frac{66!}{33!} + \frac{66!}{22!}$

c) $f^{(60)}(0) = \frac{60!}{30!} + \frac{60!}{20!} + \frac{60!}{12!}$

d) $f^{(70)}(0) = \frac{70!}{35!} + \frac{70!}{14!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{5, 6})$

b) $\int_0^\infty \frac{x^5 + x^3}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{6, 8})$

c) $\int_0^\infty \frac{x^7 + x^5}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{8, 12})$

d) $\int_0^\infty \frac{x^6 + x^4}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{7, 10})$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^4}{k^7}} = \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{64}}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^2}{k^5}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1\frac{1}{8}}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^4}{k^9}} = \frac{\mathbf{75}}{\mathbf{64}} = \mathbf{1\frac{11}{64}}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^2}{k^7}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1\frac{7}{8}}$$

5. Podaj kres dolny zbioru.

$$\text{a) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 32x + 32y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-96}$$

$$\text{b) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 32x : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-48}$$

$$\text{c) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 4x + 4y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-6}$$

$$\text{d) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 4x + 32y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-51}$$

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^3 \cdot \bar{z}^3 = 5^9$.

$$\text{a) } z = 2 + ai, \quad a = \mathbf{11}$$

$$\text{b) } z = 5 + ai, \quad a = \mathbf{10}$$

$$\text{c) } z = 11 + ai, \quad a = \mathbf{2}$$

$$\text{d) } z = 10 + ai, \quad a = \mathbf{5}$$

7. Niech $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Dla danego k podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy A^k .

a) $k = 4$, **10 016**

b) $k = 2$, **104**

c) $k = 5$, **100 032**

d) $k = 3$, **1008**

8. Dla podanej jednej z liczb a , b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(3, 2, 1)$ i $(9, 4, 1)$.

a) $a = 4$, $b = -12$, $c = 12$

b) $a = -2/3$, $b = 2$, $c = -2$

c) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

d) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 24^k . Wówczas

a) $C(1) = 8$

b) $C(2) = 21$

c) $C(4) = 65$

d) $C(3) = 40$

10. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(-3, \infty)$, a działanie grupowe "o" jest określone wzorem $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 3$, $g^{-1} = -17/6$

b) $g = 1$, $g^{-1} = -11/4$

c) $g = 2$, $g^{-1} = -14/5$

d) $g = 0$, $g^{-1} = -8/3$

11. Rzucamy n -ścienną kostką do gry (mającą na ścianach kolejne liczby oczek od 1 do n , przy czym każdy wynik wypada z prawdopodobieństwem $1/n$). Jeżeli wypadło $n/2$ oczek lub mniej, unieważniamy pierwszy rzut i rzucaamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(16) = 21/2 = 10\frac{1}{2}$

b) $E(12) = 8$

c) $E(20) = 13$

d) $E(14) = 37/4 = 9\frac{1}{4}$

12. Zdarzenia losowe A , B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ i $P(B \cap C)$ podaj $P(A \cap B \cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B i C spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/7$, $P(A \cap C) = 4/7$, $P(B \cap C) = 1/12$,
 $P(A \cap B \cap C) = 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21$

b) $P(A \cap B) = 4/7$, $P(A \cap C) = 4/7$, $P(B \cap C) = 1/4$,
 $P(A \cap B \cap C) = \text{NIE}$

c) $P(A \cap B) = 3/7$, $P(A \cap C) = 3/7$, $P(B \cap C) = 1/4$,
 $P(A \cap B \cap C) = 3/14$

d) $P(A \cap B) = 2/7$, $P(A \cap C) = 2/7$, $P(B \cap C) = 1/12$,
 $P(A \cap B \cap C) = 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots + bn}$.

Wtedy

a) $G(3, 3) = 4/9$

b) $G(7, 4) = 3/2$

c) $G(5, 2) = 3$

d) $G(5, 4) = 3/4$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(75)}(0) = \frac{75!}{25!} + \frac{75!}{15!}$

b) $f^{(60)}(0) = \frac{60!}{30!} + \frac{60!}{20!} + \frac{60!}{12!}$

c) $f^{(70)}(0) = \frac{70!}{35!} + \frac{70!}{14!}$

d) $f^{(66)}(0) = \frac{66!}{33!} + \frac{66!}{22!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^\infty \frac{x^7 + x^5}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (8, 12)$

b) $\int_0^\infty \frac{x^5 + x^3}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (6, 8)$

c) $\int_0^\infty \frac{x^6 + x^4}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (7, 10)$

d) $\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (5, 6)$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^2}{k^5}} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^4}{k^9}} = \frac{75}{64} = 1\frac{11}{64}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^2}{k^7}} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^4}{k^7}} = \frac{45}{64}$$

5. Podaj kres dolny zbioru.

$$\text{a) } \inf \{x^4 + y^4 + 32x + 32y : x, y \in \mathbb{R}\} = -96$$

$$\text{b) } \inf \{x^4 + y^4 + 4x + 4y : x, y \in \mathbb{R}\} = -6$$

$$\text{c) } \inf \{x^4 + y^4 + 4x + 32y : x, y \in \mathbb{R}\} = -51$$

$$\text{d) } \inf \{x^4 + y^4 + 32x : x, y \in \mathbb{R}\} = -48$$

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^3 \cdot \bar{z}^3 = 5^9$.

$$\text{a) } z = 11 + ai, \quad a = 2$$

$$\text{b) } z = 5 + ai, \quad a = 10$$

$$\text{c) } z = 10 + ai, \quad a = 5$$

$$\text{d) } z = 2 + ai, \quad a = 11$$

7. Niech $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Dla danego k podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy A^k .

a) $k = 2$, **104**

b) $k = 5$, **100 032**

c) $k = 3$, **1008**

d) $k = 4$, **10 016**

8. Dla podanej jednej z liczb a , b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(3, 2, 1)$ i $(9, 4, 1)$.

a) $a = 4$, $b = -12$, $c = 12$

b) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

c) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

d) $a = -2/3$, $b = 2$, $c = -2$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 24^k . Wówczas

a) $C(4) = 65$

b) $C(2) = 21$

c) $C(3) = 40$

d) $C(1) = 8$

10. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(-3, \infty)$, a działanie grupowe "o" jest określone wzorem $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 3$, $g^{-1} = -17/6$

b) $g = 2$, $g^{-1} = -14/5$

c) $g = 0$, $g^{-1} = -8/3$

d) $g = 1$, $g^{-1} = -11/4$

11. Rzucamy n -ścienną kostką do gry (mającą na ścianach kolejne liczby oczek od 1 do n , przy czym każdy wynik wypada z prawdopodobieństwem $1/n$). Jeżeli wypadło $n/2$ oczek lub mniej, unieważniamy pierwszy rzut i rzucaamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(12) = 8$

b) $E(20) = 13$

c) $E(14) = 37/4 = 9\frac{1}{4}$

d) $E(16) = 21/2 = 10\frac{1}{2}$

12. Zdarzenia losowe A , B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ i $P(B \cap C)$ podaj $P(A \cap B \cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B i C spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A \cap B) &= 1/7, \quad P(A \cap C) = 4/7, \quad P(B \cap C) = 1/12, \\ P(A \cap B \cap C) &= 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(A \cap B) &= 3/7, \quad P(A \cap C) = 3/7, \quad P(B \cap C) = 1/4, \\ P(A \cap B \cap C) &= 3/14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(A \cap B) &= 2/7, \quad P(A \cap C) = 2/7, \quad P(B \cap C) = 1/12, \\ P(A \cap B \cap C) &= 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(A \cap B) &= 4/7, \quad P(A \cap C) = 4/7, \quad P(B \cap C) = 1/4, \\ P(A \cap B \cap C) &= \text{NIE} \end{aligned}$$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots + bn}$.

Wtedy

a) $G(5, 2) = \mathbf{3}$

b) $G(3, 3) = \mathbf{4/9}$

c) $G(5, 4) = \mathbf{3/4}$

d) $G(7, 4) = \mathbf{3/2}$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(66)}(0) = \frac{66!}{33!} + \frac{66!}{22!}$

b) $f^{(70)}(0) = \frac{70!}{35!} + \frac{70!}{14!}$

c) $f^{(60)}(0) = \frac{60!}{30!} + \frac{60!}{20!} + \frac{60!}{12!}$

d) $f^{(75)}(0) = \frac{75!}{25!} + \frac{75!}{15!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^\infty \frac{x^6 + x^4}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{7, 10})$

b) $\int_0^\infty \frac{x^5 + x^3}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{6, 8})$

c) $\int_0^\infty \frac{x^7 + x^5}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{8, 12})$

d) $\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{5, 6})$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^2}{k^7}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1\frac{7}{8}}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^2}{k^5}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1\frac{1}{8}}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^4}{k^7}} = \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{64}}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^4}{k^9}} = \frac{\mathbf{75}}{\mathbf{64}} = \mathbf{1\frac{11}{64}}$$

5. Podaj kres dolny zbioru.

$$\text{a) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 32x : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-48}$$

$$\text{b) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 4x + 32y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-51}$$

$$\text{c) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 4x + 4y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-6}$$

$$\text{d) } \inf \left\{ x^4 + y^4 + 32x + 32y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-96}$$

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^3 \cdot \bar{z}^3 = 5^9$.

$$\text{a) } z = 10 + ai, \quad a = \mathbf{5}$$

$$\text{b) } z = 5 + ai, \quad a = \mathbf{10}$$

$$\text{c) } z = 11 + ai, \quad a = \mathbf{2}$$

$$\text{d) } z = 2 + ai, \quad a = \mathbf{11}$$

7. Niech $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Dla danego k podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy A^k .

a) $k = 3$, **1008**

b) $k = 2$, **104**

c) $k = 4$, **10 016**

d) $k = 5$, **100 032**

8. Dla podanej jednej z liczb a , b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(3, 2, 1)$ i $(9, 4, 1)$.

a) $a = -2/3$, $b = 2$, $c = -2$

b) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

c) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

d) $a = 4$, $b = -12$, $c = 12$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 24^k . Wówczas

a) $C(3) = 40$

b) $C(2) = 21$

c) $C(4) = 65$

d) $C(1) = 8$

10. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(-3, \infty)$, a działanie grupowe "o" jest określone wzorem $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 1$, $g^{-1} = -11/4$

b) $g = 2$, $g^{-1} = -14/5$

c) $g = 3$, $g^{-1} = -17/6$

d) $g = 0$, $g^{-1} = -8/3$

11. Rzucamy n -ścienną kostką do gry (mającą na ścianach kolejne liczby oczek od 1 do n , przy czym każdy wynik wypada z prawdopodobieństwem $1/n$). Jeżeli wypadło $n/2$ oczek lub mniej, unieważniamy pierwszy rzut i rzucaamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(14) = 37/4 = 9\frac{1}{4}$

b) $E(12) = 8$

c) $E(16) = 21/2 = 10\frac{1}{2}$

d) $E(20) = 13$

12. Zdarzenia losowe A , B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ i $P(B \cap C)$ podaj $P(A \cap B \cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B i C spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 4/7$, $P(A \cap C) = 4/7$, $P(B \cap C) = 1/4$,
 $P(A \cap B \cap C) = \mathbf{NIE}$

b) $P(A \cap B) = 2/7$, $P(A \cap C) = 2/7$, $P(B \cap C) = 1/12$,
 $P(A \cap B \cap C) = 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21$

c) $P(A \cap B) = 3/7$, $P(A \cap C) = 3/7$, $P(B \cap C) = 1/4$,
 $P(A \cap B \cap C) = \mathbf{3/14}$

d) $P(A \cap B) = 1/7$, $P(A \cap C) = 4/7$, $P(B \cap C) = 1/12$,
 $P(A \cap B \cap C) = 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots + bn}$.

Wtedy

a) $G(5, 4) = \mathbf{3/4}$

b) $G(3, 3) = \mathbf{4/9}$

c) $G(7, 4) = \mathbf{3/2}$

d) $G(5, 2) = \mathbf{3}$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(60)}(0) = \frac{60!}{30!} + \frac{60!}{20!} + \frac{60!}{12!}$

b) $f^{(75)}(0) = \frac{75!}{25!} + \frac{75!}{15!}$

c) $f^{(66)}(0) = \frac{66!}{33!} + \frac{66!}{22!}$

d) $f^{(70)}(0) = \frac{70!}{35!} + \frac{70!}{14!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^\infty \frac{x^6 + x^4}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{7, 10})$

b) $\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{5, 6})$

c) $\int_0^\infty \frac{x^5 + x^3}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{6, 8})$

d) $\int_0^\infty \frac{x^7 + x^5}{\sqrt{x^{2p} + x^p}} dx, \quad (\mathbf{8, 12})$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^4}{k^7}} = \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{64}}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \sqrt[3]{\frac{n^2}{k^5}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1\frac{1}{8}}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^4}{k^9}} = \frac{\mathbf{75}}{\mathbf{64}} = \mathbf{1\frac{11}{64}}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{32n} \sqrt[5]{\frac{n^2}{k^7}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1\frac{7}{8}}$$

5. Podaj kres dolny zbioru.

$$\text{a)} \quad \inf \left\{ x^4 + y^4 + 4x + 4y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-6}$$

$$\text{b)} \quad \inf \left\{ x^4 + y^4 + 32x + 32y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-96}$$

$$\text{c)} \quad \inf \left\{ x^4 + y^4 + 32x : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-48}$$

$$\text{d)} \quad \inf \left\{ x^4 + y^4 + 4x + 32y : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{-51}$$

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^3 \cdot \bar{z}^3 = 5^9$.

$$\text{a)} \quad z = 10 + ai, \quad a = \mathbf{5}$$

$$\text{b)} \quad z = 2 + ai, \quad a = \mathbf{11}$$

$$\text{c)} \quad z = 5 + ai, \quad a = \mathbf{10}$$

$$\text{d)} \quad z = 11 + ai, \quad a = \mathbf{2}$$

7. Niech $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Dla danego k podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy A^k .

a) $k = 4$, **10 016**

b) $k = 2$, **104**

c) $k = 5$, **100 032**

d) $k = 3$, **1008**

8. Dla podanej jednej z liczb a , b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(3, 2, 1)$ i $(9, 4, 1)$.

a) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

b) $a = 4$, $b = -12$, $c = 12$

c) $a = -2/3$, $b = 2$, $c = -2$

d) $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 24^k . Wówczas

a) $C(3) = 40$

b) $C(1) = 8$

c) $C(2) = 21$

d) $C(4) = 65$

10. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(-3, \infty)$, a działanie grupowe "o" jest określone wzorem $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 2$, $g^{-1} = -14/5$

b) $g = 3$, $g^{-1} = -17/6$

c) $g = 1$, $g^{-1} = -11/4$

d) $g = 0$, $g^{-1} = -8/3$

11. Rzucamy n -ścienną kostką do gry (mającą na ścianach kolejne liczby oczek od 1 do n , przy czym każdy wynik wypada z prawdopodobieństwem $1/n$). Jeżeli wypadło $n/2$ oczek lub mniej, unieważniamy pierwszy rzut i rzucaamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(16) = 21/2 = 10\frac{1}{2}$

b) $E(12) = 8$

c) $E(20) = 13$

d) $E(14) = 37/4 = 9\frac{1}{4}$

12. Zdarzenia losowe A , B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ i $P(B \cap C)$ podaj $P(A \cap B \cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B i C spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 3/7$, $P(A \cap C) = 3/7$, $P(B \cap C) = 1/4$,
 $P(A \cap B \cap C) = 3/14$

b) $P(A \cap B) = 1/7$, $P(A \cap C) = 4/7$, $P(B \cap C) = 1/12$,
 $P(A \cap B \cap C) = 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21$

c) $P(A \cap B) = 4/7$, $P(A \cap C) = 4/7$, $P(B \cap C) = 1/4$,
 $P(A \cap B \cap C) = \text{NIE}$

d) $P(A \cap B) = 2/7$, $P(A \cap C) = 2/7$, $P(B \cap C) = 1/12$,
 $P(A \cap B \cap C) = 1/(7\sqrt{3}) = \sqrt{3}/21$