W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a,b)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+k+\ldots+an}{(2n+1)+(2n+2)+\ldots+(2n+k)+\ldots+bn}$.
Wtedy

a) $G(3,3)=\mathbf{9/5}$ b) $G(4,4)=\mathbf{4/3}$

c) $G(5,3)=\mathbf{5}$ d) $G(7,5)=\mathbf{7/3}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{13}+x^5}\,dx$, $\mathbf{\emptyset}$ b) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{12}+x^4}\,dx$, $\mathbf{(3,\ 11/3)}$

c) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{11}+x^3}\,dx$, $\mathbf{(2,\ 10/3)}$ d) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{10}+x^2}\,dx$, $\mathbf{(1,\ 3)}$

3. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\dfrac{k}{n^2+k^2}=\dfrac{\mathbf{ln17}}{\mathbf{2}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{k}{n^2+k^2}=\dfrac{\mathbf{ln10}}{\mathbf{2}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\dfrac{k}{n^2+2k^2}=\dfrac{\mathbf{ln33}}{\mathbf{4}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{k}{n^2+2k^2}=\dfrac{\mathbf{ln19}}{\mathbf{4}}$

4. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{10}\cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(73)}(0)=\dfrac{\mathbf{73!}}{\mathbf{21!}}$ b) $f^{(40)}(0)=\dfrac{\mathbf{40!}}{\mathbf{10!}}$

c) $f^{(43)}(0)=\dfrac{\mathbf{43!}}{\mathbf{11!}}$ d) $f^{(70)}(0)=\dfrac{\mathbf{70!}}{\mathbf{20!}}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/4}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{0}$ $D = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$

b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/4}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$ $D = \boldsymbol{1/\sin\varphi}$

c) $\int_0^3 \int_{x/\sqrt{3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/6}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{0}$ $D = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$

d) $\int_0^3 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{3}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/6}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$ $D = \boldsymbol{\sqrt{3}/\sin\varphi}$

6. Niech $z = (1-i)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{618} = \boldsymbol{2^{927}\cdot i}$ b) $z^{612} = \boldsymbol{-2^{918}}$

c) $z^{606} = \boldsymbol{-2^{909}\cdot i}$ d) $z^{603} = \boldsymbol{2^{904} - 2^{904}\cdot i}$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 1,\ a = \mathbf{2}$

b) $\lambda = 6,\ a = \mathbf{2}$

c) $\lambda = 7,\ a = \mathbf{\sqrt{10}}$

d) $\lambda = 8,\ a = \mathbf{3\sqrt{2} = \sqrt{18}}$

8. Niech $A = (0, 0)$ i $B = (2, 3)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC.

a) $C = (5, 0),\quad P_{ABC} = \mathbf{15/2}$

b) $C = (4, 3),\quad P_{ABC} = \mathbf{3}$

c) $C = (3, 4),\quad P_{ABC} = \mathbf{1/2}$

d) $C = (0, 5),\quad P_{ABC} = \mathbf{5}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 30^k i niezawierających liczby 30. Wówczas

a) $C(3) = \mathbf{56}$

b) $C(2) = \mathbf{19}$

c) $C(9) = \mathbf{992}$

d) $C(4) = \mathbf{117}$

10. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą taką liczbę naturalną n, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $k = 34,\quad n = \mathbf{21}$

b) $k = 28,\quad n = \mathbf{13}$

c) $k = 30,\quad n = \mathbf{12}$

d) $k = 32,\quad n = \mathbf{34}$

11. W urnie znajdują się dwie spreparowane monety. Jedna moneta daje przy rzucie orła z prawdopodobieństwem 1/3, a reszkę z prawdopodobieństwem 2/3. Druga moneta daje przy rzucie orła z prawdopodobieństwem 2/3, a reszkę z prawdopodobieństwem 1/3. Losujemy z urny jedną monetę, a następnie wylosowaną monetą wykonujemy n rzutów. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wypadły dokładnie dwa orły. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2) = \mathbf{5/18}$

b) $P(3) = \mathbf{1/3}$

c) $P(4) = \mathbf{8/27}$

d) $P(5) = \mathbf{20/81}$

12. Zdarzenia losowe A, B, C i D są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(B\cap C)$ i $P(C\cap D)$ podaj $P(A\cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B, C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B) = 1/3$, $P(B\cap C) = 3/4$, $P(C\cap D) = 3/5$, $P(A\cap D) = \mathbf{4/15}$

b) $P(A\cap B) = 2/3$, $P(B\cap C) = 1/4$, $P(C\cap D) = 2/5$, $P(A\cap D) = \mathbf{NIE}$

c) $P(A\cap B) = 2/3$, $P(B\cap C) = 3/4$, $P(C\cap D) = 4/5$, $P(A\cap D) = \mathbf{32/45}$

d) $P(A\cap B) = 1/3$, $P(B\cap C) = 1/4$, $P(C\cap D) = 1/5$, $P(A\cap D) = \mathbf{4/15}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a,b)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+k+\ldots+an}{(2n+1)+(2n+2)+\ldots+(2n+k)+\ldots+bn}$.
Wtedy

a) $G(5,3)=\mathbf{5}$

b) $G(4,4)=\mathbf{4/3}$

c) $G(3,3)=\mathbf{9/5}$

d) $G(7,5)=\mathbf{7/3}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{10}+x^2}\,dx$, $(\mathbf{1,\ 3})$

b) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{11}+x^3}\,dx$, $(\mathbf{2,\ 10/3})$

c) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{13}+x^5}\,dx$, $\mathbf{\emptyset}$

d) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{12}+x^4}\,dx$, $(\mathbf{3,\ 11/3})$

3. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\dfrac{k}{n^2+2k^2}=\dfrac{\mathbf{ln33}}{\mathbf{4}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\dfrac{k}{n^2+k^2}=\dfrac{\mathbf{ln17}}{\mathbf{2}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{k}{n^2+k^2}=\dfrac{\mathbf{ln10}}{\mathbf{2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{k}{n^2+2k^2}=\dfrac{\mathbf{ln19}}{\mathbf{4}}$

4. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{10}\cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(73)}(0)=\dfrac{\mathbf{73!}}{\mathbf{21!}}$

b) $f^{(70)}(0)=\dfrac{\mathbf{70!}}{\mathbf{20!}}$

c) $f^{(43)}(0)=\dfrac{\mathbf{43!}}{\mathbf{11!}}$

d) $f^{(40)}(0)=\dfrac{\mathbf{40!}}{\mathbf{10!}}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int_0^3 \int_{x/\sqrt{3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/6}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{0}$ $D = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$

b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/4}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$ $D = \boldsymbol{1/\sin\varphi}$

c) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/4}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{0}$ $D = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$

d) $\int_0^3 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{3}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/6}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$ $D = \boldsymbol{\sqrt{3}/\sin\varphi}$

6. Niech $z = (1-i)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{603} = \boldsymbol{2^{904} - 2^{904}\cdot \mathrm{i}}$ b) $z^{606} = \boldsymbol{-2^{909}\cdot \mathrm{i}}$

c) $z^{618} = \boldsymbol{2^{927}\cdot \mathrm{i}}$ d) $z^{612} = \boldsymbol{-2^{918}}$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 7,\ a = \mathbf{\sqrt{10}}$

b) $\lambda = 6,\ a = \mathbf{2}$

c) $\lambda = 1,\ a = \mathbf{2}$

d) $\lambda = 8,\ a = \mathbf{3\sqrt{2} = \sqrt{18}}$

8. Niech $A = (0, 0)$ i $B = (2, 3)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC.

a) $C = (0, 5),\quad P_{ABC} = \mathbf{5}$

b) $C = (3, 4),\quad P_{ABC} = \mathbf{1/2}$

c) $C = (5, 0),\quad P_{ABC} = \mathbf{15/2}$

d) $C = (4, 3),\quad P_{ABC} = \mathbf{3}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 30^k i niezawierających liczby 30. Wówczas

a) $C(9) = \mathbf{992}$

b) $C(3) = \mathbf{56}$

c) $C(2) = \mathbf{19}$

d) $C(4) = \mathbf{117}$

10. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą taką liczbę naturalną n, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $k = 34,\quad n = \mathbf{21}$

b) $k = 32,\quad n = \mathbf{34}$

c) $k = 30,\quad n = \mathbf{12}$

d) $k = 28,\quad n = \mathbf{13}$

11. W urnie znajdują się dwie spreparowane monety. Jedna moneta daje przy rzucie orła z prawdopodobieństwem 1/3, a reszkę z prawdopodobieństwem 2/3. Druga moneta daje przy rzucie orła z prawdopodobieństwem 2/3, a reszkę z prawdopodobieństwem 1/3. Losujemy z urny jedną monetę, a następnie wylosowaną monetą wykonujemy n rzutów. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wypadły dokładnie dwa orły. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4) = \mathbf{8/27}$

b) $P(3) = \mathbf{1/3}$

c) $P(2) = \mathbf{5/18}$

d) $P(5) = \mathbf{20/81}$

12. Zdarzenia losowe A, B, C i D są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(B\cap C)$ i $P(C\cap D)$ podaj $P(A\cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B, C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B) = 1/3$, $P(B\cap C) = 1/4$, $P(C\cap D) = 1/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{4/15}$

b) $P(A\cap B) = 2/3$, $P(B\cap C) = 3/4$, $P(C\cap D) = 4/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{32/45}$

c) $P(A\cap B) = 1/3$, $P(B\cap C) = 3/4$, $P(C\cap D) = 3/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{4/15}$

d) $P(A\cap B) = 2/3$, $P(B\cap C) = 1/4$, $P(C\cap D) = 2/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{NIE}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a,b)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+k+\ldots+an}{(2n+1)+(2n+2)+\ldots+(2n+k)+\ldots+bn}$.
Wtedy

a) $G(5,3)=\mathbf{5}$

b) $G(3,3)=\mathbf{9/5}$

c) $G(7,5)=\mathbf{7/3}$

d) $G(4,4)=\mathbf{4/3}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{13}+x^5}\,dx$, $\mathbf{\emptyset}$

b) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{11}+x^3}\,dx$, $\mathbf{(2,\ 10/3)}$

c) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{10}+x^2}\,dx$, $\mathbf{(1,\ 3)}$

d) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{12}+x^4}\,dx$, $\mathbf{(3,\ 11/3)}$

3. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{k}{n^2+k^2}=\mathbf{\dfrac{\ln 10}{2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\dfrac{k}{n^2+k^2}=\mathbf{\dfrac{\ln 17}{2}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\dfrac{k}{n^2+2k^2}=\mathbf{\dfrac{\ln 33}{4}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{k}{n^2+2k^2}=\mathbf{\dfrac{\ln 19}{4}}$

4. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{10}\cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(73)}(0)=\mathbf{\dfrac{73!}{21!}}$

b) $f^{(43)}(0)=\mathbf{\dfrac{43!}{11!}}$

c) $f^{(70)}(0)=\mathbf{\dfrac{70!}{20!}}$

d) $f^{(40)}(0)=\mathbf{\dfrac{40!}{10!}}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int_0^3 \int_{x/\sqrt{3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/6}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{0}$ $D = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$

b) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/4}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{0}$ $D = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$

c) $\int_0^3 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{3}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/6}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$ $D = \boldsymbol{\sqrt{3}/\sin\varphi}$

d) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A = \boldsymbol{\pi/4}$ $B = \boldsymbol{\pi/2}$ $C = \boldsymbol{\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$ $D = \boldsymbol{1/\sin\varphi}$

6. Niech $z = (1-i)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{618} = \boldsymbol{2^{927}\cdot i}$ b) $z^{606} = \boldsymbol{-2^{909}\cdot i}$

c) $z^{603} = \boldsymbol{2^{904} - 2^{904}\cdot i}$ d) $z^{612} = \boldsymbol{-2^{918}}$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 7,\ a = \mathbf{\sqrt{10}}$

b) $\lambda = 1,\ a = \mathbf{2}$

c) $\lambda = 8,\ a = \mathbf{3\sqrt{2} = \sqrt{18}}$

d) $\lambda = 6,\ a = \mathbf{2}$

8. Niech $A = (0, 0)$ i $B = (2, 3)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC.

a) $C = (5, 0),\quad P_{ABC} = \mathbf{15/2}$

b) $C = (3, 4),\quad P_{ABC} = \mathbf{1/2}$

c) $C = (0, 5),\quad P_{ABC} = \mathbf{5}$

d) $C = (4, 3),\quad P_{ABC} = \mathbf{3}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 30^k i niezawierających liczby 30. Wówczas

a) $C(2) = \mathbf{19}$

b) $C(3) = \mathbf{56}$

c) $C(9) = \mathbf{992}$

d) $C(4) = \mathbf{117}$

10. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą taką liczbę naturalną n, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $k = 34,\quad n = \mathbf{21}$

b) $k = 30,\quad n = \mathbf{12}$

c) $k = 32,\quad n = \mathbf{34}$

d) $k = 28,\quad n = \mathbf{13}$

11. W urnie znajdują się dwie spreparowane monety. Jedna moneta daje przy rzucie orła z prawdopodobieństwem 1/3, a reszkę z prawdopodobieństwem 2/3. Druga moneta daje przy rzucie orła z prawdopodobieństwem 2/3, a reszkę z prawdopodobieństwem 1/3. Losujemy z urny jedną monetę, a następnie wylosowaną monetą wykonujemy n rzutów. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wypadły dokładnie dwa orły. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4) = \mathbf{8/27}$

b) $P(2) = \mathbf{5/18}$

c) $P(5) = \mathbf{20/81}$

d) $P(3) = \mathbf{1/3}$

12. Zdarzenia losowe A, B, C i D są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(B\cap C)$ i $P(C\cap D)$ podaj $P(A\cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B, C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B) = 1/3$, $P(B\cap C) = 3/4$, $P(C\cap D) = 3/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{4/15}$

b) $P(A\cap B) = 2/3$, $P(B\cap C) = 3/4$, $P(C\cap D) = 4/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{32/45}$

c) $P(A\cap B) = 1/3$, $P(B\cap C) = 1/4$, $P(C\cap D) = 1/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{4/15}$

d) $P(A\cap B) = 2/3$, $P(B\cap C) = 1/4$, $P(C\cap D) = 2/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{NIE}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a,b)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+k+\ldots+an}{(2n+1)+(2n+2)+\ldots+(2n+k)+\ldots+bn}$.
Wtedy

a) $G(3,3)=\mathbf{9/5}$ b) $G(7,5)=\mathbf{7/3}$

c) $G(4,4)=\mathbf{4/3}$ d) $G(5,3)=\mathbf{5}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{13}+x^5}\,dx$, $\mathbf{\emptyset}$ b) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{10}+x^2}\,dx$, $\mathbf{(1,3)}$

c) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{12}+x^4}\,dx$, $\mathbf{(3,11/3)}$ d) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3p}+x^p}{x^{11}+x^3}\,dx$, $\mathbf{(2,10/3)}$

3. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\dfrac{k}{n^2+2k^2}=\mathbf{\dfrac{\ln 33}{4}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\dfrac{k}{n^2+k^2}=\mathbf{\dfrac{\ln 17}{2}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{k}{n^2+2k^2}=\mathbf{\dfrac{\ln 19}{4}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{k}{n^2+k^2}=\mathbf{\dfrac{\ln 10}{2}}$

4. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{10}\cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(73)}(0)=\mathbf{\dfrac{73!}{21!}}$ b) $f^{(70)}(0)=\mathbf{\dfrac{70!}{20!}}$

c) $f^{(40)}(0)=\mathbf{\dfrac{40!}{10!}}$ d) $f^{(43)}(0)=\mathbf{\dfrac{43!}{11!}}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\dfrac{\boldsymbol{\cos\varphi}}{\boldsymbol{\sin^2\varphi}}$

b) $\int_0^3 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{3}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{\pi/6}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\dfrac{\boldsymbol{\cos\varphi}}{\boldsymbol{\sin^2\varphi}}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{3}/\sin\varphi}$

c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\dfrac{\boldsymbol{\cos\varphi}}{\boldsymbol{\sin^2\varphi}}$ $D=\boldsymbol{1/\sin\varphi}$

d) $\int_0^3 \int_{x/\sqrt{3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{\pi/6}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\dfrac{\boldsymbol{\cos\varphi}}{\boldsymbol{\sin^2\varphi}}$

6. Niech $z=(1-i)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{618}=\boldsymbol{2^{927}\cdot i}$

b) $z^{603}=\boldsymbol{2^{904}-2^{904}\cdot i}$

c) $z^{612}=\boldsymbol{-2^{918}}$

d) $z^{606}=\boldsymbol{-2^{909}\cdot i}$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 1,\ a = \mathbf{2}$

b) $\lambda = 8,\ a = \mathbf{3\sqrt{2} = \sqrt{18}}$

c) $\lambda = 6,\ a = \mathbf{2}$

d) $\lambda = 7,\ a = \mathbf{\sqrt{10}}$

8. Niech $A = (0, 0)$ i $B = (2, 3)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC.

a) $C = (5, 0),\quad P_{ABC} = \mathbf{15/2}$

b) $C = (0, 5),\quad P_{ABC} = \mathbf{5}$

c) $C = (4, 3),\quad P_{ABC} = \mathbf{3}$

d) $C = (3, 4),\quad P_{ABC} = \mathbf{1/2}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 30^k i niezawierających liczby 30. Wówczas

a) $C(9) = \mathbf{992}$

b) $C(3) = \mathbf{56}$

c) $C(4) = \mathbf{117}$

d) $C(2) = \mathbf{19}$

10. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą taką liczbę naturalną n, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $k = 34,\quad n = \mathbf{21}$

b) $k = 32,\quad n = \mathbf{34}$

c) $k = 28,\quad n = \mathbf{13}$

d) $k = 30,\quad n = \mathbf{12}$

11. W urnie znajdują się dwie spreparowane monety. Jedna moneta daje przy rzucie orła z prawdopodobieństwem 1/3, a reszkę z prawdopodobieństwem 2/3. Druga moneta daje przy rzucie orła z prawdopodobieństwem 2/3, a reszkę z prawdopodobieństwem 1/3. Losujemy z urny jedną monetę, a następnie wylosowaną monetą wykonujemy n rzutów. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wypadły dokładnie dwa orły. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2) = \mathbf{5/18}$

b) $P(5) = \mathbf{20/81}$

c) $P(3) = \mathbf{1/3}$

d) $P(4) = \mathbf{8/27}$

12. Zdarzenia losowe A, B, C i D są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(B\cap C)$ i $P(C\cap D)$ podaj $P(A\cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B, C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B) = 1/3$, $P(B\cap C) = 3/4$, $P(C\cap D) = 3/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{4/15}$

b) $P(A\cap B) = 1/3$, $P(B\cap C) = 1/4$, $P(C\cap D) = 1/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{4/15}$

c) $P(A\cap B) = 2/3$, $P(B\cap C) = 1/4$, $P(C\cap D) = 2/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{NIE}$

d) $P(A\cap B) = 2/3$, $P(B\cap C) = 3/4$, $P(C\cap D) = 4/5$,
$P(A\cap D) = \mathbf{32/45}$