Zadanie 1. (3 punkty)

Wyznacz największą wartość funkcji $f(x, y) = xy^3$ na zbiorze A zadanym nierównością $x^2 + 2y^2 \leq 1$, oraz znajdź wszystkie punkty zbioru A w których owa wartość jest przyjmowana.

Zadanie 2. (3 punkty)

Zbadaj zbieżność szeregu w zależności od wartości dodatniego rzeczywistego parametru p:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n^p)}{n^p}$$

Zadanie 3. (4 punkty)

Rozważamy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkami brzegowymi:

$$u'' + u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0$$

Oczywiście funkcja $u(x) \equiv 0$ jest rozwiązaniem tego zagadnienia.

Wyznacz wszystkie wartości parametru $L > 0$, dla których istnieją niezerowe rozwiązania.

Podaj te rozwiązania.

Zadanie 4. (3 punkty)

Podaj przykład czterech parami niewspółliniowych wektorów własnych macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

lub uzasadnij, że taki przykład nie istnieje.

Zadanie 5. (3 punkty)

Zbiór pierwiastków pewnego wielomianu $P(z)$ o współczynnikach zespolonych jest symetryczny względem osi urojonej (OY); ponadto wiadomo, że wielomian ten nie ma pierwiastków wielokrotnych. Udowodnij, że współczynniki wielomianu $P(z)$ występujące przy parzystych potęgach z są rzeczywiste, zaś jego współczynniki przy nieparzystych potęgach z są urojone. Zakładamy, że $P(0) = 1$.

Zadanie 6. (4 punkty)

Przemek i Gosia grają w następującą grę. Wykonują rzuty monetą. Gdy w dwóch kolejnych rzutach pojawią się orły, gra zostaje zakończona i wygrywa Przemek. Gdy w dwóch kolejnych rzutach pojawią się reszki, gra zostaje zakończona i wygrywa Gosia. Oblicz wartość oczekiwaną czasu trwania gry (mierzonego liczbą rzutów).