EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
25 lutego 2022 r.

Zadanie **1.** Dana jest funkcja $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[\pi]{x^\pi+1}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć największą wartość funkcji

$$f(x,y)=5x+12y$$

na okręgu

$$\Big\{(x,y):\,x^2+y^2=1\Big\}\,.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartość największa jest osiągana.

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$y''-y=2\sin x\,,\qquad y(0)=1\,,\qquad y'(0)=0\,.$$

Zadanie **4.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka macierz A rozmiaru 5×5 o wyrazach całkowitych, że

$$A^5=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&4&0&0&0\\0&0&8&0&0\\0&0&0&16&0\\0&0&0&0&64\end{pmatrix}.$$

Zadanie **5.** Podać przykład skończonej grupy abelowej G oraz takich jej elementów a, b i c, że

- rząd elementu ab jest równy 2,
- rząd elementu bc jest równy 3,
- rząd elementu ac jest równy 5.

Oczywista oczywistość: Udowodnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **6.** W urnie znajduje się dziewięć kul z liczbą 2 i jedna kula z liczbą 0. Gracz podaje liczbę całkowitą dodatnią $n\leqslant10$, a następnie losuje z urny n kul (bez zwracania). Następnie gracz otrzymuje tyle złotych, ile wynosi iloczyn liczb na wylosowanych przez niego kulach. Jaką liczbę n powinien wskazać gracz, aby zmaksymalizować wartość oczekiwaną swojej wygranej?