**EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)**
**29 czerwca 2026 r.**

*Zadanie* **1.** Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej nieujemnej $x$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[4]{x} \leqslant \frac{x}{32} + \frac{3}{2}\,.$$

*Zadanie* **2.** Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$$

na zbiorze

$$\left\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 = 16 \ \wedge \ x^2+y^2+2z^2 = 25\right\}.$$

Wyznacz wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

*Zadanie* **3.** Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$x''(t) - x(t) = t\,, \qquad x(0) = 1\,, \qquad x'(0) = 0\,.$$

*Zadanie* **4.** Podaj przykład (wraz z uzasadnieniem poprawności) takiej macierzy $A$ rozmiaru $n \times n$ o współczynnikach **całkowitych**, że

**a) (7 punktów)** $n = 8$, $\quad A^k \neq I_8$ dla $k = 1,2,3,\ldots,14$ oraz $A^{15} = I_8$.

**b) (7 punktów)** $n = 2$, $\quad A^k \neq I_2$ dla $k = 1,2,3$ oraz $A^4 = I_2$.

**c) (6 punktów)** $n = 8$, $\quad A^k \neq I_8$ dla $k = 1,2,3,\ldots,19$ oraz $A^{20} = I_8$.

*Uwaga:* Przez $I_n$ oznaczamy macierz identycznościową rozmiaru $n \times n$.

*Zadanie* **5.** Podaj przykład (wraz z uzasadnieniem poprawności):

**a) (10 punktów)** pierścienia przemiennego z jedynką różną od zera oraz podpierścienia, który nie jest ideałem.

**b) (10 punktów)** pierścienia przemiennego z jedynką różną od zera oraz takich dwóch ideałów $I_1$, $I_2$, że $I_1 \neq \{0\} \neq I_2$ oraz $I_1 \cap I_2 = \{0\}$.

*Zadanie* **6.** Sekretarka ma $n$ kopert i $n$ listów, przy czym każdy list odpowiada dokładnie jednej kopercie. Sekretarka wkłada listy do kopert w sposób losowy. Niech $P_k$ będzie prawdopodobieństwem, że dokładnie $k$ listów trafiło do właściwych kopert.

Wyznacz takie stałe $C_i$ dla $i = 0,1,2,3,4$, że

$$P_k = \frac{C_{n-k}}{k!} \qquad \text{dla} \qquad n-4 \leqslant k \leqslant n\,.$$

**Punktacja:** Za wyznaczenie stałych $C_i$ dla $i = 0,1,2,3,4$ możesz otrzymać odpowiednio **1, 1, 3, 5 i 10 punktów.**