EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
10 września 2026 r.

Zadanie **1.** Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej nieujemnej x zachodzi nierówność

$$\sqrt[4]{x^3} \leqslant \frac{3x}{8} + 2\,.$$

Zadanie **2.** Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = 6x + 4y + |2x - 3y|$$

na okręgu

$$\left\{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Wyznacz wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$x''(t) = (t+2)\cdot e^t\,, \qquad x(0) = 0\,, \qquad x'(0) = 1\,.$$

Zadanie **4.** **a) (10 punktów)** Dane jest takie przekształcenie liniowe $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, że $F^2 = \mathbf{0}$. Udowodnij, że wówczas $\mathrm{Ker}(F)$ ma wymiar co najmniej 3.

b) (10 punktów) Podaj (wraz z uzasadnieniem poprawności) przykład takiego przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, że $\mathrm{Ker}(F)$ ma wymiar 2 oraz $F^3 = \mathbf{0}$.

Oznaczenia:
Przez $\mathbf{0}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ oznaczamy przekształcenie zerowe.
Przez $\mathrm{Ker}(F)$ oznaczamy jądro przekształcenia F.

Zadanie **5.** Dana jest 21-elementowa grupa G oraz jej elementy a, b takie, że:

$$G = \left\{a^n b^k\colon n = 0,1,2,\ k = 0,1,2,3,4,5,6\right\}$$

oraz

$$\mathrm{ord}(a) = 3\,, \qquad \mathrm{ord}(b) = 7 \qquad \text{i} \qquad ba = ab^2\,.$$

a) (2 punkty) Udowodnij, że grupa G nie jest abelowa.

b) (5 punktów) Wyznacz takie $k \in \{0,1,2\}$ oraz $n \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, że w grupie G zachodzi równość

$$\left(a^2 b^5\right)^{-1} = a^k b^n\,.$$

c) (6 punktów) Rozstrzygnij, czy podgrupa $H_3 = \{e, a, a^2\}$ jest podgrupą normalną grupy G.

d) (7 punktów) Rozstrzygnij, czy podgrupa $H_7 = \{e, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6\}$ jest podgrupą normalną grupy G.

Oznaczenia:
Przez $\mathrm{ord}(g)$ oznaczamy rząd elementu g w grupie G.

Przypomnienie: Podgrupa H grupy G jest normalna, jeżeli dla każdego $g \in G$ zachodzi równość warstw lewo- i prawostronnej: $gH = Hg$. Podgrupa normalna nazywana jest też dzielnikiem normalnym.

Zadanie **6.** W urnie znajduje się $2n$ kul, z których jedna jest biała, a pozostałe $2n-1$ to kule czarne. Losujemy z urny n-krotnie po jednej kuli, przy czym po każdym losowaniu wylosowana kula wraca z powrotem do urny (losowanie ze zwracaniem). Niech P_n będzie prawdopodobieństwem, że dokładnie jeden raz wylosowano kulę białą. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} P_n\,.$$