Rozwiązanie zadania 1

Nierówność

$$T(n) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

będziemy dowodzić *indukcyjnie* tzn.

$$\Big(T(1) \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}}\, T(n) \Rightarrow T(n+1)\Big) \Longrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\, T(n)$$

Dla $n = 1$ mamy:

$$T(1) \equiv \binom{2\cdot 1+2}{1} \leqslant 4^1 \equiv \frac{4!}{1!\,3!} \leqslant 4 \equiv \mathbf{1} \quad \text{– prawda.}$$

Teraz dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ dowód wynikania:

$$T(n) \Rightarrow T(n+1)$$

Mamy

$$\begin{aligned}
&\binom{2(n+1)+2}{n+1} = \\
&= \binom{2n+4}{n+1} = \frac{(2n+4)!}{(n+1)!\,(2n+4-n-1)!} = \frac{(2n+4)!}{(n+1)!\,(n+3)!} = \\
&= \frac{(2n+2)!}{n!\,(2n+2-n)} \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} = \binom{2n+2}{n} \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)}
\end{aligned}$$

Wykażemy teraz, że:

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4, \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A jest tak, bo:

$$\begin{gathered}
(2n+3)(2n+4) \leqslant 4(n+1)(n+3) \\
4n^2 + 14n + 12 \leqslant 4n^2 + 16n + 12 \\
0 \leqslant 2n
\end{gathered}$$

Skąd, przy założeniu $T(n) \equiv \mathbf{1}$ mamy:

$$\begin{aligned}
&T(n+1) \equiv \\
&\equiv \binom{2(n+1)+2}{n+1} \leqslant 4^{n+1} \equiv \binom{2n+2}{n} \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4^n \cdot 4 \equiv \\
&\equiv \binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n \equiv T(n) \equiv \mathbf{1}
\end{aligned}$$

□

Wrocław, dnia 18 lutego 2005

Zadanie **1.**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n .$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $\binom{2n+2}{n} = \binom{4}{1} = 4$ oraz $4^n = 4^1 = 4$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \leqslant 4$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n .$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+4}{n+1} \leqslant 4^{n+1} .$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\binom{2n+4}{n+1} = \frac{(2n+4)!}{(n+1)!(n+3)!} = \frac{(2n+2)!(2n+3)(2n+4)}{n!(n+1)(n+2)!(n+3)} =$$
$$= \binom{2n+2}{n} \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4^n \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4^n \cdot 4 = 4^{n+1},$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4$$

dla $n \geqslant 1$. Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(2n+3)(2n+4) \leqslant 4(n+1)(n+3)$$
$$4n^2+14n+12 \leqslant 4n^2+16n+12$$
$$0 \leqslant 2n ,$$

jest więc prawdziwa.

Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność została udowodniona dla każdego $n \geqslant 1$.

Za dojście do wyrażenia $\binom{2n+2}{n} \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)}$ i oszacowanie go przez $4^n \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)}$ można było otrzymać **1 punkt**.

Głównym problemem okazało się udowodnienie nierówności

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4 .$$

Ze zbieżności

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} = 4$$

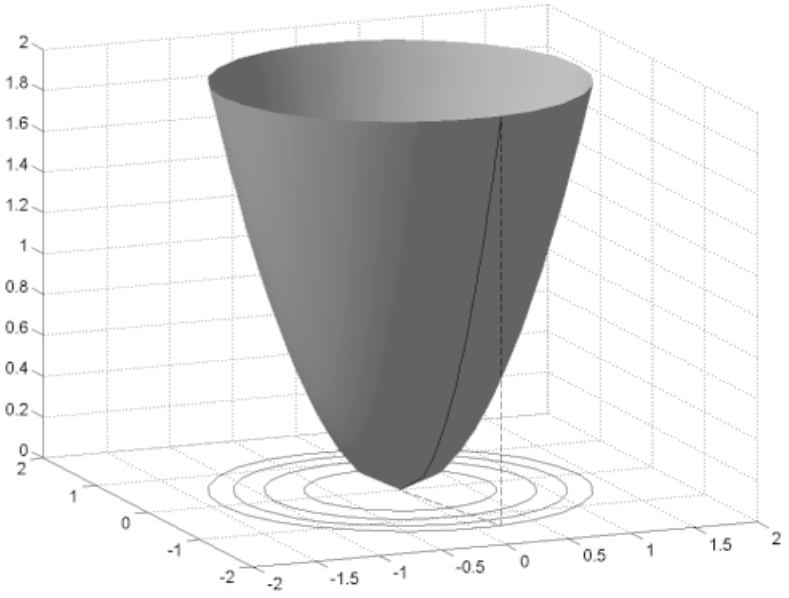
ta nierówność nie wynika, aczkolwiek dwie osoby w oparciu o powyższą zbieżność zdołały przeprowadzić poprawny dowód, jednak o wiele bardziej skomplikowany niż dowód samej nierówności.

Rozwiązanie zadania 2

Mamy dla $A > 0$ obliczyć objętość bryły:

$$\{(x, y, z) : 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant A\} \subset \mathbb{R}^3$$

Jest to wnętrze paraboloidy obrotowej $z = x^2+y^2$ (powierzchnia powstała przez obrót paraboli $z = x^2$ wokół osi $0z$) ograniczonej z góry płaszczyzną $z = A$.



Rysunek 1: Powierzchnia $\{(x, y, z) : 0 \leqslant x^2 + y^2 = z \leqslant A\}$ dla $A = 2$.

Kilka sposobów w jaki można obliczyć objętość rozważanej bryły.

1. Według wzoru:

$$V = \int_0^A S(p)\, dp$$

gdzie $S(p)$ jest polem przekroju rozważanej bryły z płaszczyzną $z = p \geqslant 0$. Przekrojem tym jest koło o pramieniu $\sqrt{p}$, tak więc $S(p) = \pi p$. Stąd mamy, że

$$V = \int_0^A \pi p\, dp = \pi \frac{p^2}{2}\Big|_0^A = \frac{1}{2}A^2\pi.$$

2. Wzór na ojętość bryły powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji $z = f(x)$ wokół osi Oz:

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{A}} x f(x)\, dx.$$

U nas $z = x^2$ skąd otrzymujemy

$$V = \pi(\sqrt{A})^2 A - 2\pi \int_0^{\sqrt{A}} x\, x^2\, dx = \pi A^2 - 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{A}} = \frac{1}{2}A^2\pi,$$

gdzie $\pi(\sqrt{A})^2 A$ jest objętością walca o promieniu $\sqrt{A}$ i wysokości A.

3. Podobnie jak poprzednio, ojętość bryły powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji $x = g(z)$ wokół osi $0z$ z tym, że całkujemy wzdłuż osi $0z$:

$$V = \pi \int_0^A [g(z)]^2\, dz.$$

W sytuacji naszej bryły mamy $g(z) = \sqrt{z}$ i dalej

$$V = \pi \int_0^A \left(\sqrt{z}\right)^2 dz = \pi \frac{z^2}{2}\Big|_0^A = \frac{1}{2}A^2\pi.$$

4. Z definicji całki podwójnej:

$$V = \pi A^2 - \int\int_{\{(x,y):x^2+y^2\leqslant\sqrt{A}\}} x^2 + y^2\, dx\, dy$$

Przechodząc do współrzędnych biegunowych ($x = r\sin\varphi,\ y = r\cos\varphi$) otrzymujemy:

$$\int\int_{\{(x,y):x^2+y^2\leqslant\sqrt{A}\}} x^2 + y^2\, dx\, dy =$$

$$= \int\int_{[0,2\pi]\times[0,\sqrt{A}]} r^2 \cdot r\, d\varphi\, dr = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{A}} r^3 dr\, d\varphi = 2\pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{A}} = \frac{1}{2}A^2\pi.$$

I ostatecznie

$$V = \pi A^2 - \frac{1}{2}A^2\pi = \frac{1}{2}A^2\pi.$$

Wrocław, dnia 17 lutego 2005

Zadanie 3. (3 punkty)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 2(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$$

na kwadracie $K = \{(x,y) : x,y \in [-1,1]\}$. Wyznaczyć wszystkie punkty kwadratu, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

ROZWIĄZANIE. I SPOSÓB.

Po pierwsze. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 + 2(x^2-1)(y^2-1) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 2 = \\ &= (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 1 + 1 = \\ &= \left((x^2+y^2) - 1\right)^2 + 1 \geq 1 \end{aligned}$$

i równość $f(x,y) = 1$ zachodzi dla punktów okręgu $x^2 + y^2 = 1$, który (cały) zawarty jest w kwadracie K.

Po drugie. x^2+y^2 jest kwadratem odległości punktu (x,y) od $(0,0)$, więc na kwadracie K przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\left[0, \sqrt{2}^2\right]$, zatem x^2+y^2-1 na K przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[-1,1]$, przy czym wartość 1 przyjmuje w wierzchołkach kwadratu a wartość -1 w środku. Stąd $f(x,y)$ na K przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[0^2+1, (\pm 1)^2+1]$, przy czym największą 2 w punktach: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.

ROZWIĄZANIE. II SPOSÓB.

Funkcja f jest ciągła i K jest zwarty (domknięty i ograniczony podzbiór R^2), więc f osiąga swoje kresy na K. Zbadamy punkty wnętrza K i brzegu K.

$\diamondsuit$ *Wnętrze* K. f ma wszędzie pochodne cząstkowe, więc **może** przyjmować swoje kresy jedynie w tych punktach wnętrza K, w których **obie** się zerują:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 + 4x(y^2-1) = 0 \\ 4y^3 + 4y(x^2-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \cdot (x^2+y^2-1) = 0 \\ y \cdot (x^2+y^2-1) = 0 \end{cases}.$$

Są to: $(0,0)$ i punkty okręgu $x^2+y^2 = 1$ (z wyjątkiem środków boków K).

Mamy: $f(0,0) = 2$. Zauważmy, że dla punktów okręgu $y^2 = 1 - x^2$ jest: $f(x,y) = x^4 + (1-x^2)^2 + 2(x^2-1)((1-x^2)-1) = x^4 + 1 - 2x^2 + x^4 - 2x^4 + 2x^2 = 1$.

$\diamondsuit$ *Brzeg* K. Mamy $f(x,1) = x^4 + 1^4 + 2(x^2-1)(1^2-1) = x^4 + 1$, więc dla $x \in [-1,1]$ wartość najmniejsza 1 jest dla $x = 0$, a największa 2 dla $x = \pm 1$. Zatem na boku kwadratu $y = 1$ wartość najmniejsza 1 jest przyjęta w środku, a największa 2 na końcach tego boku. Tak samo jest na pozostałych bokach.

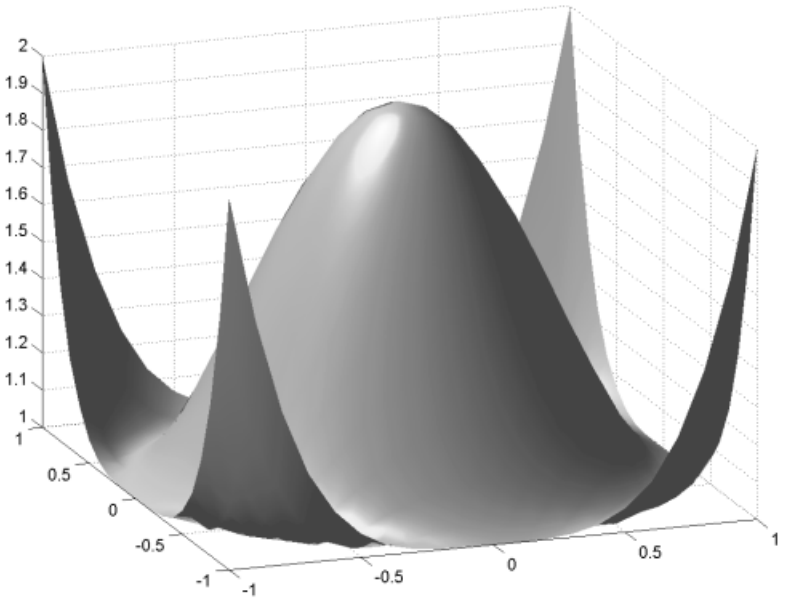
$\diamondsuit$ *Podsumowanie.* f może przyjmować swoje kresy tylko w punktach powyżej zbadanych, a w tych punktach przyjmuje tylko dwie wartości: 1 i 2, zatem:

f najmniejszą wartość na K równą 1 przyjmuje na okręgu $x^2+y^2 = 1$,

f największą wartość na K równą 2 przyjmuje w pięciu punktach:

$$(0,0),\ (1,1),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (1,-1).$$

Rysunek do zadania 3



Rysunek 1: Wykres $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$ dla $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$.

Mam nadzieję, że dobry!

Wrocław, dnia 17 lutego 2005

Rozwiązanie zadania 4

O wektorach $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ wiemy, że

$$\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$$

$$\langle x, y\rangle = \langle y, z\rangle = \langle z, x\rangle = -\tfrac{1}{2}$$

gdzie $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Sposób pierwszy

Mamy wykazać, że istnieją takie liczby $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$ że

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = (0, 0, 0).$$

Gdyby tak było (szukamy warunku koniecznego), to biorąc

$$0 = \langle x, \alpha x + \beta y + \gamma z\rangle =$$

$$= \alpha\langle x, x\rangle + \beta\langle x, y\rangle + \gamma\langle x, z\rangle = \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$$

otrzymujemy, że musi być spełniony związek

$$\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 0.$$

Dla liczb $\alpha = \beta = \gamma = 1$ znaleziony warunek konieczny zachodzi! Ponadto mamy, że

$$\|x + y + z\|^2 = \langle x + y + z, x + y + z\rangle =$$

$$= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 + \langle y, z\rangle + \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle + \|z\|^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0.$$

A to oznacza, że

$$x + y + z = (0, 0, 0)$$

i wektory x, y, z są liniowo zależne.

Sposób drugi

O wektorze x, bez utraty ogólności możemy założyć, że jest postaci $x = (1, 0, 0)$.

Teraz mamy z równości $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}$, że $y_1 = -\frac{1}{2}$ i podobnie z $\langle z, x\rangle = -\frac{1}{2}$ otrzymujemy $z_1 = -\frac{1}{2}$.

Z $\|y\| = \|z\| = 1$ i $\langle y, z\rangle = -\frac{1}{2}$ odpowiednio dostajemy:

$$y_2^2 + y_3^2 = \frac{3}{4}$$

$$z_2^2 + z_3^2 = \frac{3}{4}$$

$$y_2z_2 + y_3z_3 = -\frac{3}{4}$$

Jasne jest teraz, iż:

$$(y_2 + z_2)^2 + (y_3 + z_3)^2 =$$
$$= \quad y_2^2 + y_3^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(y_2 z_2 + y_3 z_3) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2\,\frac{3}{4} = 0.$$

Otrzymaliśmy więc, że $z_2 = -y_2$ i $z_3 = -y_3$.

Mamy teraz:

$$x + y + z = (1, 0, 0) + (-\frac{1}{2}, y_2, y_3) + (-\frac{1}{2}, -y_2, -y_3) = (0, 0, 0)$$

co dowodzi, że układ wektorów x, y, z jest liniowo zależny.

Wrocław, dnia 18 lutego 2005

Rozwiązanie zadania 5

Jeżeli w grupie G dla dowolnych elementów $a, b \in G$ zachodzi związek

$$ab = b^3a^3$$

to biorąc za $b = e$ otrzymujemy, że dla dowolnego $a \in G$ zachodzi:

$$a = a^3.$$

Stąd

$$ab = b^3a^3 = ba$$

dla dowolnych elementów $a, b \in G$.

□

Wrocław, dnia 18 lutego 2005