

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots + an}{(2n + 1) + (2n + 2) + \dots + (2n + k) + \dots + bn}$.

Wtedy

a) $G(3, 3) = \dots\dots\dots$ b) $G(4, 4) = \dots\dots\dots$

c) $G(5, 3) = \dots\dots\dots$ d) $G(7, 5) = \dots\dots\dots$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^{3p} + x^p}{x^{13} + x^5} dx, \dots\dots\dots$ b) $\int_0^{\infty} \frac{x^{3p} + x^p}{x^{12} + x^4} dx, \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^{3p} + x^p}{x^{11} + x^3} dx, \dots\dots\dots$ d) $\int_0^{\infty} \frac{x^{3p} + x^p}{x^{10} + x^2} dx, \dots\dots\dots$

3. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{4n} \frac{k}{n^2 + k^2} = \dots\dots\dots$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{3n} \frac{k}{n^2 + k^2} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{4n} \frac{k}{n^2 + 2k^2} = \dots\dots\dots$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{3n} \frac{k}{n^2 + 2k^2} = \dots\dots\dots$

4. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{10} \cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(73)}(0) = \dots\dots\dots$ b) $f^{(40)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(43)}(0) = \dots\dots\dots$ d) $f^{(70)}(0) = \dots\dots\dots$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

$$\text{a) } \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, r \, dr \, d\varphi$$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

$$\text{b) } \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) \, dy \, dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, r \, dr \, d\varphi$$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

$$\text{c) } \int_0^3 \int_{x/\sqrt{3}}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, r \, dr \, d\varphi$$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

$$\text{d) } \int_0^3 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{3}} f(x, y) \, dy \, dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, r \, dr \, d\varphi$$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

6. Niech $z = (1 - i) \cdot (\sqrt{3} + i)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

$$\text{a) } z^{618} = \dots\dots\dots \qquad \qquad \text{b) } z^{612} = \dots\dots\dots$$

$$\text{c) } z^{606} = \dots\dots\dots \qquad \qquad \text{d) } z^{603} = \dots\dots\dots$$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 1, \quad a = \dots\dots\dots$

b) $\lambda = 6, \quad a = \dots\dots\dots$

c) $\lambda = 7, \quad a = \dots\dots\dots$

d) $\lambda = 8, \quad a = \dots\dots\dots$

8. Niech $A = (0, 0)$ i $B = (2, 3)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC .

a) $C = (5, 0), \quad P_{ABC} = \dots\dots\dots$

b) $C = (4, 3), \quad P_{ABC} = \dots\dots\dots$

c) $C = (3, 4), \quad P_{ABC} = \dots\dots\dots$

d) $C = (0, 5), \quad P_{ABC} = \dots\dots\dots$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 30^k i niezawierających liczby 30. Wówczas

a) $C(3) = \dots\dots\dots$

b) $C(2) = \dots\dots\dots$

c) $C(9) = \dots\dots\dots$

d) $C(4) = \dots\dots\dots$

10. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą taką liczbę naturalną n , że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k .

a) $k = 34, \quad n = \dots\dots\dots$

b) $k = 28, \quad n = \dots\dots\dots$

c) $k = 30, \quad n = \dots\dots\dots$

d) $k = 32, \quad n = \dots\dots\dots$

11. W urnie znajdują się dwie spreparowane monety. Jedna moneta daje przy rzucie orła z prawdopodobieństwem $1/3$, a reszkę z prawdopodobieństwem $2/3$. Druga moneta daje przy rzucie orła z prawdopodobieństwem $2/3$, a reszkę z prawdopodobieństwem $1/3$. Losujemy z urny jedną monetę, a następnie wylosowaną monetą wykonujemy n rzutów. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wypadły dokładnie dwa orły. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2) = \dots\dots\dots$ b) $P(3) = \dots\dots\dots$

c) $P(4) = \dots\dots\dots$ d) $P(5) = \dots\dots\dots$

12. Zdarzenia losowe A , B , C i D są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ i $P(C \cap D)$ podaj $P(A \cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B , C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/3$, $P(B \cap C) = 3/4$, $P(C \cap D) = 3/5$,
 $P(A \cap D) = \dots\dots\dots$

b) $P(A \cap B) = 2/3$, $P(B \cap C) = 1/4$, $P(C \cap D) = 2/5$,
 $P(A \cap D) = \dots\dots\dots$

c) $P(A \cap B) = 2/3$, $P(B \cap C) = 3/4$, $P(C \cap D) = 4/5$,
 $P(A \cap D) = \dots\dots\dots$

d) $P(A \cap B) = 1/3$, $P(B \cap C) = 1/4$, $P(C \cap D) = 1/5$,
 $P(A \cap D) = \dots\dots\dots$